Założenie $A \subset B$ Hipoteza $\overline{A} \subset \overline{B}$

Niech $x \in \overline{A}$, więc $\forall_{r>0}\ k(x,r) \cap A \neq \emptyset$

ale skoro $A \subset B$ to

$\forall_r\ k(x,r) \cap A \subset k(x,r) \cap B \neq \emptyset$

więc $x \in \overline{B}$ ■

$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Niech $x \in \overline{A \cup B}$, więc:

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \forall_{r>0}\ k(x,r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall_{r>0}\ k(x,r) \cap A \neq \emptyset \vee k(x,r) \cap B \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ ■

$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Niech $x \in \overline{A \cap B}$ i załóżmy, $A \cap B \neq \emptyset$

$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \forall_{r>0}\ k(x,r) \cap (A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{r>0}\ k(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge k(x,r) \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Teraz popatrzmy co w sytuacji gdy $A \cap B = \emptyset$.

Wtedy $\overline{A \cap B} = \emptyset$ więc zawiera się on w $\overline{A} \cap \overline{B}$ nieważne ile wynosi

Przykład zbiorów takich, że $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

$A = (-1;0)$ $B = (0,1)$ w $\mathbb{R}$ ze zwykłą topologią

$A \cap B = \emptyset$ $\overline{A \cap B} = \emptyset$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$