

EGZAMIN Z ANALIZY II R

INSTRUKCJA OBSŁUGI. Za każde zadanie można dostać 4 punkty. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na osobnej kartce starannie i czytelnie. W nagłówku rozwiązania należy umieścić numer zadania, imię i nazwisko oraz nazwisko prowadzącego ćwiczenia.

Zadanie 1. Wyznacz jawny wzór na funkcję

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} e^{-x} dx, \quad a \in [0, +\infty].$$

Zadanie 2. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Znaleźć wymiary stożka obrotowego o całkowitym polu powierzchni równym S , który ma największą objętość.

Zadanie 4. W przestrzeni X funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$ o wartościach rzeczywistych wprowadzamy normę wzorem $\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Znaleźć wzór na pochodną kierunkową $\nabla_h F(f)$ odwzorowania $F: X \rightarrow X$

$$(F(f))(t) = \int_0^t f(s)^2 ds, \quad f \in X, \quad t \in [0, 1]$$

oraz zbadać różniczkowalność tego odwzorowania.

Zadanie 5. Obliczyć moment bezwładności względem osi OY płaskiej płytki o gęstości powierzchniowej $\rho \equiv 1$ i kształcie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq R^{\frac{2}{3}}\}$$

dla pewnej stałej $R > 0$.

Wskazówka: wprowadzić na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) \mid t \geq 0\}$ współrzędne $(\rho, \psi) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ takie, że

$$x = R\rho \cos^3 \psi,$$

$$y = R\rho \sin^3 \psi$$

i zapisać odpowiednią całkę w tych współrzędnych.

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. Dla potrzeb zadania możemy zawęzić przedział zmienności a do $[0, A]$ dla pewnego $A > 0$.

Funkcja F jest ciągła, gdyż

- funkcja podcałkowa $f: [0, A] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(a, x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos ax}{x} e^{-x} & x > 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła,

- całka

$$f(a) = \int_0^\infty f(a, x) dx$$

jest zbieżna jednostajnie. Aby to udowodnić rozważmy rozbitcie przedziału całkowania:

$$\int_0^\infty f(a, x) dx = \int_0^1 f(a, x) dx + \int_1^\infty f(a, x) dx.$$

Druuga całka jest zbieżna jednostajnie na mocy kryterium Weierstrassa: dla $x \geq 1$ mamy

$$|f(x, a)| \leq 2e^{-x},$$

a pierwsza także, bo $f(a, \cdot)$ zależy w sposób ciągły od a : dla $a, a' \in]0, A]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \cos ax}{x} e^{-x} - \frac{1 - \cos a'x}{x} e^{-x} \right| &\leq \frac{e^{-x}}{x} |\cos(ax) - \cos(a'x)| \\ &\leq 2 \frac{e^{-x}}{x} \left| \sin \frac{(a+a')x}{2} \right| \left| \sin \frac{(a-a')x}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} e^{-x} |a + a'| |a - a'| \leq Ae^{-x} |a - a'|, \end{aligned}$$

(bo $\frac{|\sin(bx)|}{x} = b \frac{|\sin(bx)|}{bx} \leq b$), czyli

$$\|f(a, \cdot) - f(a', \cdot)\| \xrightarrow{a \rightarrow a'} 0.$$

Podobnie

$$\lim_{a \searrow 0} f(a, \cdot) = 0$$

jednostajnie względem $x \in [0, 1]$.

Funkcja f jest różniczkowalna po a dla wszystkich x i mamy

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a_0, x) = e^{-x} \sin a_0 x.$$

Jest jasne, że całka $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a_0, x) dx$ jest zbieżna jednostajnie (ponownie kryterium Weierstrassa).

Oznacza to, że funkcja F jest różniczkowalna na $]0, A[$ i

$$F'(a_0) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a_0, x) dx = e^{-x} \frac{\sin(a_0 x) + a_0 \cos(a_0 x)}{a_0^2 + 1} \Big|_{+\infty}^0 = \frac{a_0}{a_0^2 + 1}.$$

Stąd

$$F(a) = \int \frac{a}{a^2 + 1} da = \frac{1}{2} \log(a^2 + 1) + C.$$

Stałą C wyznaczamy zauważając, że $\lim_{a \searrow 0} F(a) = 0$ i

$$\lim_{a \searrow 0} \frac{1}{2} \log(a^2 + 1) = 0,$$

co daje $C = 0$. Odpowiedź: $F(a) = \log \sqrt{a^2 + 1}$. □

Zadanie 2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

jest trajektoria

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizujemy A : mamy $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. Dalej

$$\ker(A - 3\mathbb{I}) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

oraz

$$\ker(A - \mathbb{I}) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Stąd

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

jest bazą diagonalizującą. Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

czyli

$$A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy R.O.R.J.:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Teraz stosujemy metodę uzmienniania stałych: przyjmujemy

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix},$$

co po wstawieniu do równania niejednorodnego daje

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{y}_0(t) \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy równania

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= \cosh t, \\ \dot{y}_0(t) &= -\sinh t \end{aligned}$$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \sinh t + C_1, \\ y_0(t) &= -\cosh t + C_2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego jest

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= e^{2t} \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sinh t \\ -\cosh t \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Zadanie 4. Dla ustalonych $f, h \in X$ i $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(F(f + \varepsilon h) - F(f))(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^t (f(s) + \varepsilon h(s))^2 ds - \int_0^t f(s)^2 ds \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^t (f(s)^2 + 2\varepsilon f(s)h(s) + \varepsilon^2 h(s)^2) ds - \int_0^t f(s)^2 ds \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(2\varepsilon \int_0^t f(s)h(s) ds + \varepsilon^2 \int_0^t h(s)^2 ds \right) \\ &= 2 \int_0^t f(s)h(s) ds + \varepsilon \int_0^t h(s)^2 ds = (L_f h)(t) + \varepsilon(F(h))(t), \end{aligned}$$

gdzie $L_f: X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem liniowym

$$(L_f h)(t) = 2 \int_0^t f(s)h(s) ds,$$

które jest ewidentnie ciągłe:

$$|(L_f h)(t)| \leq 2 \int_0^t |f(s)||h(s)| ds \leq 2 \int_0^1 |f(s)||h(s)| ds \leq 2\|f\|\|h\|.$$

Tak więc $\frac{1}{\varepsilon}(F(f + \varepsilon h) - F(f)) - L_f h = \varepsilon F(h)$. Teraz dla każdego $t \in [0, 1]$

$$|F(h)(t)| \leq \int_0^t h(s)^2 ds \leq \int_0^1 h(s)^2 ds \leq \|h\|^2,$$

a stąd

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}(F(f + \varepsilon h) - F(f)) - L_f h \right\| \leq \varepsilon \|h\|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

czyli

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(F(f + \varepsilon h) - F(f)) = L_f h$$

w X . Oznacza to, że $\nabla_h F(f) = L_f h$.

Aby wykazać, że F jest różniczkowalne możemy albo

- łatwo sprawdzić, że $F(f + h) - F(f) - L_f h$ jest małą wyższego rzędu niż h

lub

- skorzystać z twierdzenia, że jeśli słaba pochodna zależy w sposób ciągły od punktu, to odwzorowanie jest klasy C^1 .

Wybierając drugi sposób sprawdzamy, że

$$\|L_{f_1} - L_{f_2}\| \leq 2\|f_1 - f_2\|,$$

jako że

$$\left| 2 \int_0^t f_1(s)h(s) ds - 2 \int_0^t f_2(s)h(s) ds \right| \leq 2 \int_0^1 |f_1(s) - f_2(s)||h(s)| ds \leq 2\|f_1 - f_2\|\|h\|.$$

□

Zadanie 5. Niech $\Phi:]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) \mid t \geq 0\}$

$$\Phi(\rho, \psi) = (R\rho \cos^3 \psi, R\rho \sin^3 \psi).$$

Wtedy $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho, \psi) \mid \rho \in]0, 1], \psi \in]0, 2\pi[\}$.

Dla dowolnej mierzalnej funkcji f na A mamy

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} f(\Phi(\rho, \psi)) |\det \Phi'(\rho, \psi)| d\rho d\psi = \int_A f(x, y) dx dy.$$

Szukany moment bezwładności wyraża się całką po prawej stronie dla $f(x, y) = x^2$, natomiast

$$\Phi'(\rho, \psi) = \begin{bmatrix} R \cos^3 \psi & -3R\rho \sin \psi \cos^2 \psi \\ R \sin^3 \psi & 3R\rho \cos \psi \sin^2 \psi \end{bmatrix}$$

więc

$$\begin{aligned} \det \Phi'(\rho, \psi) &= \det \begin{bmatrix} R \cos^3 \psi & -3R\rho \sin \psi \cos^2 \psi \\ R \sin^3 \psi & 3R\rho \cos \psi \sin^2 \psi \end{bmatrix} \\ &= 3R\rho \det \begin{bmatrix} R \cos^3 \psi & -\sin \psi \cos^2 \psi \\ R \sin^3 \psi & \cos \psi \sin^2 \psi \end{bmatrix} \\ &= 3R^2 \rho \det \begin{bmatrix} \cos^3 \psi & -\sin \psi \cos^2 \psi \\ \sin^3 \psi & \cos \psi \sin^2 \psi \end{bmatrix} \\ &= 3R^2 \rho \cos^2 \psi \det \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin^3 \psi & \cos \psi \sin^2 \psi \end{bmatrix} \\ &= 3R^2 \rho \cos^2 \psi \sin^2 \psi \det \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = 3R^2 \rho \cos^2 \psi \sin^2 \psi. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int_A x^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 d\rho R^2 \rho^2 \cos^6 \psi \cdot 3R^2 \rho \cos^2 \psi \sin^2 \psi \\ &= 3R^4 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 d\rho \rho^3 \cos^8 \psi \sin^2 \psi \\ &= 3R^4 \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^8 \psi (1 - \cos^2 \psi) d\psi \right) \\ &= \frac{3}{4} R^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^8 \psi d\psi - \int_0^{2\pi} \cos^{10} \psi d\psi \right) \\ &= 3R^4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \psi d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} \psi d\psi \right) \\ &= 3R^4 \frac{\pi}{2} \left(\frac{7!!}{8!!} - \frac{9!!}{10!!} \right) = 3R^4 \frac{\pi}{2} \frac{7!!(10-9)}{10!!} \\ &= \pi R^4 \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \pi R^4 \frac{3 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \pi R^4 \frac{63}{1536}. \end{aligned}$$

□