FAQ ANALIZA R© – EGZAMIN TRENINGOWY

Uwaga! Na egzaminie z całą pewnością będą szeregi liczbowe i całki w tym całki niewłaściwe. Wybór zadań z pozostałej części materiału nie musi być taki jak poniżej! Zadania pochodzą z zasobów KMMF, zbioru zadań B.P. Demidowicza oraz notatek prywatnych.

Zadanie 1. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną, niech ponadto A oznacza niepusty podzbiór X. Definiujemy

$$d : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x) = \inf\{\rho(x,y) : \; y \in A\}.$$

Zbadać ciągłość funkcji d.

Zadanie 2. Wykazać, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\sin(x) < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}.$$

Zadanie 3. W punkcie (a) zbadać zbieżność, w punkcie (b) obliczyć:

$$(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^1 \frac{dx}{(2-1)\sqrt{1-x}}.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}, \; p \in \mathbb{R}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Zadanie 5. Znaleźć asymptotę w nieskończoności funkcji

$$]0,+\infty[\ni x \longmapsto \frac{x^{(1+x)}}{(1+x)^x}$$

Można potrenować także rozwiązując egzaminy archiwalne. Zestaw pochodzi z zasobów G. Cieciury.

EGZAMIN Z ANALIZY C, 25 stycznia 1999

1. Określmy w przestrzeni $\mathbb{R}$ z normalną metryką podzbiór $A := \{\frac{n}{m+n} + \frac{p}{m+n+p}, \; m,n,p \in \mathbb{N}\}$. Znaleźć kresy A i zbadać, czy A jest odtwarty, domknięty, zwarty, spójny.

2. Zbadać funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+6x+17}{\sqrt{x^2+2}}$. Naszkicować jej wykres. Czy f jest jednostajnie ciągła?

3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$, taką że $\forall x \leq 0 \; f(x) = 0$, $\forall x > 0 \; f(x) > 0$. Korzystając ze wzoru Taylora wykazać, że

$$\forall C > 0 \; \forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists x \in]0,\epsilon[: \quad |f^{(n)}(x)| > C^n.$$

4. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach $a_n = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} - n$

5. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n^2)^n}{(2n)!2^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{5}}\right)^n \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+100}} - 1\right]$$

Data: 30 stycznia 2016 r.