*

FAQ ANALIZA R© – ZADANIA

ODE

wersja wstępna – uwaga na błędy !!!

Botanika

Zadanie 1. Rozwiązać poniższe problemy (znaleźć rozwiązanie ogólne lub rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego)

(1) $y'\cos x - y\sin x = 2x$

(2) $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$, podstawienie $z = \tan(y/2)$

(3) $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$

(4) $y' = \frac{y}{x}\log\left|\frac{y}{x}\right|$

(5) $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

(6) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y-1}{2x-y-1}\right)^2$, podstawienie $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$

(7) $y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}$

(8) $y' = y^2 + \frac{1}{x^2}$

(9) $y' = \frac{2}{3}\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)$

(10) $y' + \frac{3}{2}y^2 + \frac{5}{3x^2}$

(11) $y' = \frac{2xy^3}{1-x^2y^2}$

(12) $y' = \frac{2xy^3}{x^2y^2-1}$

(13) $y' = \frac{x+y^3}{3(x-y^3)y^2}$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$, $y(1) = 1$

(15) $y' = \frac{3y^2}{x^3+e^y}$

(16) $xy' + ay + by^2\log x = 0$, $x > 0$

(17) $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$

(18) $y' = \frac{m^2}{x^4} - y^2$ znając rozwiązania $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2}$, $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}$

(19) $xy'' = y'$

(20) $xy'' = x^2 + y'$

(21) $xy'' = y' + \sqrt{x^2 - y^2}$, x>0

(22) $2yy'' - 2y'^2 + y^2 = 0$

(23) $y'' + 2y'^2 + y^2 = 0$

(24) $(1 - x^2)yy'' + x^2y'^2 = y^2$

(25) $y''\sin y + y'^2\cos y = y'^3\sin^2 y$

(26) $yy'' = (1 - x^{-4})y'^2 + 2x^2y^2$ dla $x > 0$

(1) jest liniowe, (2)-(5) są jednorodne, (6) jednorodne po podstawieniu, (7)-(12) jednorodne stopnia -1, tzn podstawiamy $u(x) = y(x)x$, (13) jednorodne stopnia 1/3, tzn podstawiamy $u(x) = y(x)/\sqrt[3]{x}$, (14)-(16) są równaniami Bernoulliego, (16)-(18) Riccatiego, (19)-(21),(25) podstawiamy $y'(x) = v(x)$, (22)-(24), (26) podstawiamy $y(x) = e^{u(x)}$

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienia Cauchy'ego

Data: 3 maja 2016 r.

(1) $yy'' = y^2 \log|y'|$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$

(2) $y'' = 2y^3$, $y(0) = y'(0) = 1$

(3) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$, $y(0) = \log 2$, $y'(0) = 1$

(4) $yy'' = y'^2 - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(5) $yy'' = y'^2 - 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -\sqrt{5}$

(6) $yy'' = y'^2 - 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

Zadanie 3. Rozwiązać poniższe równania (materiał dodatkowy)

(1) $(2x^3y^2 - y + x^2)ydx + x^3(xy^2 - 1)dy = 0$, czynnik całkujący w postaci $f(xy)$

(2) $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos ydy = 0$, czynnik całkujący w postaci $f(x)$

Zadanie 4. (materiał dodatkowy) Znaleźć warunek na funkcje P, Q, przy którym forma $Pdx + Qdy$ ma czynnik całkujący postaci $\mu(x, y) = f(x)y$

Zadanie 5. (materiał dodatkowy) Dowieźć, że równanie zupełne $Pdx + Qdy = 0$ ma czynnik całkujący postaci $\mu(x, y) = f(x)g(y)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją funckje α, β takie, że $P_y - Q_x = \alpha(x)Q - \beta(y)P$.

Zadanie 6. Wyrazić we współrzędnych biegunowych równanie $y' = f(x, y)$ opisując krzywą zależnością $\rho = \rho(\varphi)$. Zbadać w szczególności przypadek równania jednorodnego.

Problemy liniowe

Zadanie 7. Znaleźć rezowentę i rozwiązać zagadnienie początkowe

(1) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(4) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 8. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 2y + z, \\ \dot{y} &= x + z, \\ \dot{z} &= -2x - 5y - z, \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 3$.

Zadanie 9. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 1y, \\ \dot{y} &= 3y - z, \\ \dot{z} &= x - y + z, \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

Zadanie 10. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} &= z, \\ \dot{y} &= x - 5z, \\ \dot{z} &= y + 4z, \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 5$, $y(0) = 1$, $z(0) = -2$.

Zadanie 11. Dla $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12. Rozwiązać poniższe zagadnienia liniowe

(1) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = e^t \frac{\sin t}{\cos^2 t}$ dla $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(2) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin(e^{-t}) + te^t$

(3) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t \log t$

(4) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = e^t \sin t$

(5) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = te^t$

(6) $x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} + x = te^{-t} + \cos t$

(7) $x^{(3)} - 2x^{(1)} + 4x = 2e^{-2t} \cos^2 \frac{t}{2}$

Zadanie 13. Dla $t > 0$ znaleźć rozwiązanie ogólne równania $t^2\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{1-2t}{t^2}x = \frac{1}{t^3}$ znając rozwiazanie szczególne równania jednorodnego $x(t) = \exp(\frac{1}{t})$.

Zadanie 14. Rozwiązać równanie $(2t - t^2)\ddot{x} + (t^2 - 2)\dot{x} - 2(t-1)x = t^2$, znajdując najpierw rozwiązanie szczególne równania jednorodnego w postaci wielomianu.