FAQ ANALIZA R© – ZADANIA

Całki

wersja wstępna – uwaga na błędy !!!

Funkcje pierwotne

Zadanie 1. *Rozgrzewka.* Obliczyć całki nieoznaczone, tzn znaleźć funkcje pierwotne. W nawiasach wymienione są narzędzia jakie mogą być potrzebne przy rozwiązywaniu

(a) $\int (x^2 - 2x + 3)e^x \, dx$ (*całkowanie przez części lub zgadywanie*);

(b) $\int \sin^3 x \, dx$ (*podstawienie*);

(c) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ (*suma Fouriera*);

(d) $\int \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ (*całkowanie przez części, podstawienie*);

(e) $\int x^{-\frac{3}{2}} \log(1 + \sqrt{x}) \, dx$ (*całkowanie przez części, podstawienie, albo podstawienie i po drodze ułamki proste...*)

Zadanie 2. Całkowanie funkcji wymiernych: rozkładamy na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^k}.$$

Trudniejsze jest tylko całkowanie wyrażeń z wielomianem kwadratowym w wyższej potędze w mianowniku

(a) $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} \, dx$;

(b) $\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)} \, dx$;

(c) $\int \frac{1}{x^4 - 1} \, dx$;

(d) $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} \, dx$;

(e) $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} \, dx$;

Zadanie 3. Funkcje wymierne od trygonometrycznych:

(a) $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \, dx$;

(b) $\int \frac{1}{\sin x \sin 2x} \, dx$;

(c) $\int \frac{2\tan x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \, dx$;

Zadanie 4. *podstawienia trygonometryczne i hiperboliczne dla całek z pierwiastkami.* Gdy funkcja podcałkowa ma postać $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ można spróbować pozbyć się pierwiastka stosując podstawienia trygonometryczne

Data: 8 września 2016 r.

lub hiperboliczne. Obliczcie poniższe całki używając wskazanych podstawień i zastanówcie się w jaki sposób powinno się decydować, którego z podstawień mozna i warto użyć w konkretnym przypadku:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}} \qquad x = b\tan t, \ \text{dwa przypadki} \ 0<a<b, \ 0<b<a;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}, \qquad x+1 = \tan t;$$

całka jak wyżej, $\quad x+1 = \sinh t;$

$$\int_0^1 \frac{dx}{5+3\sqrt{1-x^2}}, \qquad x = \sin t.$$

Jako zadanie dodatkowe proszę zapisać funkcje odwrotne do sinh i cosh z użyciem logarytmów.

Zadanie 5. Obliczyć całki nieoznaczone:

(1) $\int (x^2-2x+3)e^x dx$	(2) $\int \sin^3 x\, dx$	(3) $\int \sqrt{x}(\log x)^2 dx$
(4) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$	(5) $\int x^{-\frac{3}{2}}\log(1+\sqrt{x})dx$	(6) $\int \frac{\log\|1-x\|}{x^{n+1}}dx$
(7) $\int (\frac{x}{\arctan x}-1)^{-2}dx$	(8) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$	(9) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$
(10) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$	(11) $\int \tan^2 x\, dx$	(12) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$
(13) $\int \frac{1}{x^2}\arcsin x\, dx$	(14) $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1-x^3}}$	(15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}}$
(16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$	(17) $\frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$	(18) $\int \frac{x\, dx}{x^3+1}$
(19) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$	(20) $\int \sin(\log x)dx$	(11) $\int \frac{\tan 2x\, dx}{2-3\cos^2 x}$
(22) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$	(23) $\int \frac{\sin x\cos^3 x\, dx}{2+\sin^2 x}$	(24) $\int e^{-x}\frac{x^n}{n!}dx$
(25) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}}$	(26) $\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}}$	(27) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}}$
(28) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$	(29) $\int \sqrt{e^{2x}+2e^x+4}\, dx$	

Całki oznaczone

Zadanie 6. Obliczyć poniższe całki oznaczone

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

(5) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$ (6) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx,\ n\in\mathbb{N}$ (8) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$

(9) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx, \quad m,n\in\mathbb{N},\ a<b$ (10) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad n\in\mathbb{N}$

(11) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$ (12) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

(13) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$ (14) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^n x\cos nx\,dx$

Zadanie 7. Podstawienie Eulera służą do znajdowania funkcji pierwotnych do funkcji postaci

$$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),$$

gdzie R jest wymierną funkcją dwóch zmiennych. Chodzi o to, żeby funkcję zawierającą pierwiastek sprowadzić do funkcji wymiernej. Jeśli oznaczymy $y := \sqrt{ax^2+bx+c}$ sprowadza się to do sparametryzowania fragmentu krzywej

$$x \mapsto (x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \in \mathbb{R}^2$$

dla $y > 0$ parametrem t w taki sposób, aby $x(t)$ i $y(t)$ były wymierne.

(1) Pierwsze podstawienie Eulera działa gdy $a > 0$, podstawiamy $y = \sqrt{a}x + t$. Wyznaczamy $x(t)$, $y(t)$ i $dx = x'(t)dt$;
(2) Drugie podstawienie Eulera działa gdy $c > 0$, podstawiamy $y = tx + \sqrt{c}$;
(3) Trzecie podstawienie Eulera działa gdy łatwo jest wybrać punkt (x_0, y_0) na krzywej, $y_0 = \sqrt{ax_0^2+bx_0+c}$, podstawiamy $y - y_0 = t(x-x_0)$. Prowadząc rachunki warto zapisać y^2 w potęgach $x - x_0$ zamiast x.

Zadanie polega na obliczeniu trzema sposobami całki nieoznaczonej

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} \quad \text{oraz jej wersji oznaczonej} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Zadanie 8. Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:

(a) $F_n(x) := \int \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^n dx$;
(b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x(x^2+1)^n}$ (wyliczyć $F_4(x)$);
(c) $F_n(x) := \int \frac{x^p\,dx}{\log^n x}$, $p \in \mathbb{R}$;
(d) $F_n(x) := \int x^{p-n}e^x dx$, $p \in [0,1[$;
(e) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(1+x)}$ (wyprowadzić wzór na $F_n(x)$).

Zadanie 9. Znaleźć wzór rekurencyjny, wyrażający $F_{n+2}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:

(a) $F_n(x) := \int \cos^n x\,dx$;
(b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{\sin^n x}$;
(c) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(x^2+1)}$ (znaleźć wzory na $F_{2k}(x)$ i $F_{2k+1}(x)$);
(d) $F_n(x) := \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$;
(e) $F_n(x) := \int x^n \cos x\,dx$.

Zadania różne

Zadanie 10. Dla $k \in \mathbb{Z}_+$ oznaczmy $c_k := \int_0^a x^k \cos x\,dx$, gdzie $a := \frac{\pi}{2}$. Wykazać, że:

(a) $c_{2n} = (-1)^n (2n)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}$;

(b) $c_{2n+1} = (-1)^n (2n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!} - 1 \right)$;

(c) $0 \le \frac{a}{(k+1)(k+2)} - \frac{c_k}{a^{k+1}} \le \frac{k! a^3}{(k+4)!}$;

(d) $\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{a^{k+1}} c_k = a = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 11. Dowieść, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek $\forall x \in \mathbb{R} : \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$, to jest okresowa.

Zadanie 12. Niech $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że funkcja $\hat{f} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, zadana wzorami $\hat{f}(0) := f(0)$, $\hat{f}(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ dla $x > 0$, też jest ciągła, przy czym jeśli f jest niemalejąca, to $\hat{f}$ jest także niemalejąca.

Zadanie 13. Wykazać, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to

$$\exists\, \xi \in\,]a, b[\, : \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi).$$

Zadanie 14. Niech dane $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

(a) Podać interpretację (*pole wielokąta ograniczonego łamaną* ...) wielkości

$$S_n(f) := \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) + \frac{1}{2} f(b) \right].$$

(b) Dowieść, że

$$\lim_{n\to\infty} n \left(S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \right) = 0$$

dla $f \in C^1[a, b]$. Wywnioskować stąd, że

$$n \left(\log 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n} \right) \longrightarrow \frac{1}{4},$$

$$n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{n^2+1^2} - \frac{n}{n^2+2^2} - \cdots - \frac{n}{n^2+n^2} \right) \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

Zadanie 15. Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranej całki wykazać, że:

(a) $\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \right) = \log k$ dla $2 \le k \in \mathbb{N}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{\log 2}$.

Zadanie 16. Dla ustalonych $0 < a < b$ niech H_n i G_n oznaczają, odpowiednio, średnią harmoniczną i geometryczną z $n+1$ liczb $a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k \in \overline{0, n}$. Wykazać, że

$$\sqrt{ab} \le \lim_{n\to\infty} H_n = \frac{b-a}{\log b - \log a} \le \lim_{n\to\infty} G_n = \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} \le \frac{a+b}{2}$$

Zadanie 17. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest (słabo) rosnąca, to jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.

Zadanie 18. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i nieujemna, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n dx} = \sup f([a, b])$.

Zadanie 19. Niech $f(x) := e^{\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ dla $x\in\mathbb{R}$. Dowieść, że:

(a) Dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi wzór $f(x)=\sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!}+r_n(x)$, gdzie $r_n(x):=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{(2n-1)!!}\int_0^x t^{2n}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$;

(b) $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$ dla $x\in\mathbb{R}$, skąd wynika wzór $f(x)=\sum_{k=1}^\infty \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!}$.

Całki niewłaściwe

Zadanie 20. Zbadać (w zależności od $p,q\in\mathbb{R}$) zbieżność całki niewłaściwej:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^p e^{-\frac{1}{\log x}}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/} \frac{dx}{x^p|\log x|^q}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{|\log(1-x)|^p|\log x|^q}$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\cos\frac{\pi}{2}x)^{p+qx}dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(\sin x)}{x}dx$ (f) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(1+p\cos x)dx}{(5+4\cos x)x}$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x\sin^2 x}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x\sin^2 x}\frac{dx}{x+1}$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^p\sin^2 x}$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty (1-e^{-\frac{1}{x}})\frac{dx}{x^p}$ (k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x}dx$ (l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x}dx$

(m) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}$

Zadanie 21. Wykazać zbieżność i wyliczyć całkę niewłaściwą:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^{3//2}}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})\frac{dx}{x^2+1}$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{1//\log x}dx}{x^2+e^{2//\log x}}$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-x+x\log x)dx}{(x+1)^2(x-1)\log x}$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{x^2+p^2}$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n\log x\,dx}{(x^2+p^2)^{n+1}}$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\log^3 x}{x^4+1}dx$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{x}}dx$ (k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}dx$ (l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(m) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{6x^3+\sqrt{x^2+1}}$ (n) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^4dx}{x^8+1}$ (o) $\displaystyle\int_1^\infty \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$

(p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$

Zadanie 22. Dowieść, że jeśli funkcja $f:[0,\infty[\to[0,\infty[$ jest (słabo) malejąca, to całka $\int_0^\infty [f(E(x))-f(x)]dx$ jest zbieżna.

Rozwiązania

(1)

(1) $e^x(x^2-4x+7)$;

(2) $-\dfrac{1}{3}(2+\sin^2 x)\cos x$;

(3) $\dfrac{2}{27}x^{3/2}(9\log^2 x-12\log x+8)$;

(4) $(x+1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}-\sqrt{x}$;

(5) $\log x-2(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})\log(1+\sqrt{x})$;

(6) $\frac{1}{n}[(1-x^{-n})\log|1-x|-\log|x|+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{kx^k}]$;
(7) $\frac{x\arctan x+1}{\arctan x-x}$;
(8) $\arctan x+\frac{x^3}{3}-x$;
(9) $\frac{\sqrt{2}}{4}\log\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$, podstawić $t=x+\frac{1}{x}$;
(10) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$, podstawić $t=x-\frac{1}{x}$;
(11) $\tan x-x$; (12) $\frac{2\sqrt{7}}{21}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)-\frac{1}{3}\arctan(x+2)$;
(13) $-\frac{1}{x}\arcsin x+\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}$; (14) $\frac{2}{3}\arcsin(x^{3/2})$;
(15) $-\frac{2}{n}\log\frac{1+\sqrt{x^n+1}}{x^{n/2}}$; (16) $\frac{2}{n}\arccos(x^{-n/2})$;
(17) $\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{1+x^4})$;
(18) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)-\frac{1}{3}\log(x+1)$;
(19) $x\tan x+\log\cos x$;
(20) $\frac{x}{2}(\sin\log x-\cos\log x)$;
(21) $\frac{1}{4}\log|2\tan^2 2x-1|$;
(22) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x)$;
(23) $\frac{3}{2}\log(2+\sin^2 x)-\frac{1}{2}\sin^2 x$;
(24) $-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$;
(25) $-\frac{2}{15x^3}(8x^2-4x+5)\sqrt{x^2+x}$;
(26) $x-\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{2}\log(1+2x+2\sqrt{x^2+x})$;
(27) $\frac{1}{2}\log(1+2\sqrt{x-x^2})-\frac{1}{2}\arcsin(1-2x)$;
(28) $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+2\sqrt{x-x^2}}{x\sqrt{3}}-2\arctan\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}$ (zast. 3. podst. E.);
(29) $q-2x+2\log(2q-e^x-4)+\log(q+e^x+1)$, gdzie $q:=\sqrt{e^{2x}+2e^x+4}$.

(8)

(a) $F_{n+1}(x)=-\frac{x^{2n+1}}{2n(x^2+1)^n}+\frac{2n+1}{2n}F_n(x)$;
(b) $F_{n+1}(x)=\frac{1}{2n(x^2+1)^n}+F_n(x)$, $F_4(x)=\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{6x^4+15x^2+11}{12(x^2+1)^3}$;
(c) $F_{n+1}(x)=-\frac{x^{p+1}}{n\log^n x}+\frac{p+1}{n}F_(x)$;
(d) $F_{n+1}(x)=\frac{1}{n-p}(F_n(x)-x^{p-n})$;
(e) $F_{n+1}(x)=-\frac{1}{nx^n}-F_n(x)$, $F_n(x)=(-1)^n\log|1+\frac{1}{x}|+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{kx^k}$.

(9)

(a) $F_{n+2}(x)=\frac{1}{n+2}\cos^{n+1}x\sin x+\frac{n+1}{n+2}F_n(x)$;
(b) $F_{n+2}(x)=-\frac{\cos x}{(n+1)\sin^{n+1}x}+\frac{n}{n+1}F_n(x)$;
(c) $F_{n+2}(x)=-\frac{1}{(n+1)x^{n+1}}-F_n(x)$, $F_{2k}(x)=(-1)^k\arctan x-\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{k-l}}{(2l-1)x^{2l-1}}$, $F_{2k+1}(x)=(-1)^k\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{k-l}}{2l\,x^{2l}}$;
(d) $F_{n+2}(x)=\frac{1}{n+2}\left(x^{n+1}\sqrt{x^2+1}-(n+1)F_n(x)\right)$;

(e) $F_{n+2}(x) = x^{n+1}(x\sin x + (n+2)\cos x) - (n+2)(n+1)F_n(x)$.

(13) Wyrazić wzorem Taylora $F(b) - F(a)$ dla $F(x) := \int_a^x f(\xi)d\xi$.

(15) (c) Sprawdzić, że $\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} > \frac{2^{\frac{k-1}{n}}}{n}$ dla $2 \le k \le n$.

(16) $\frac{1}{H_n}$ i $\log G_n$ są sumami Riemanna dla całek $\int_0^1 \frac{dx}{a+x(b-a)} = \frac{\log b - \log a}{b-a}$ i $\int_0^1 \log(a + x(b-a))\,dx = -1 + \frac{b\log b - a\log a}{b-a}$.

(17) Jeśli $S^*(f,\mathcal{P})$ i $S_*(f,\mathcal{P})$ oznaczają górną i dolną sumę Riemanna odpow. podziałowi $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, to $0 \le S^*(f,\mathcal{P}) - S_*(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \le \delta(\mathcal{P}) \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(\mathcal{P})(f(b) - f(a))$, co dąży do 0 przy $\delta(\mathcal{P}) := \sup_k (x_k - x_{k-1}) \to 0$.

(18) Dla dowolnego $0 < K < M := \sup f([a,b])$ zbiór $f^{-1}(]K,\infty[)$ jest $\neq \emptyset$ i otwarty w $[a,b]$, więc $f(x) > K$ na pewnym $\neq \emptyset$ przedziale $P \subset [a,b]$; zatem $(b-a)M^n \le \int_a^b f^n \le |P| \cdot K^n$, skąd ...

(19) (a) Indukcja, (b) $|r_n(x)| \le \frac{e^{x^2/2}}{(2n-1)!!} |\int_0^x t^{2n}dt| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!!} e^{x^2/2}$.

(20) Wskazówki:

(a) $\log[(1-x)f(x)] = \frac{1}{\log x}[(p+1)\log(1-x)\,\log x - 1]$;
(b) podst. $x = e^{-t}$;
(c) $\lim_{x\to 0+} \frac{|\log(1-x)|}{x} = 1$, $\lim_{x\to 1-} \frac{|\log x|}{1-x} = 1$; skorzystać z (b);
(d) $\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{(1-x)^{p+q}} = 1$, $\lim_{x\to -1+} \frac{f(x)}{(1+x)^{p-q}} = 1$;
(e) kr. Dirichleta;
(f) $g_p := \frac{1+p\cos x}{5+4\cos x}$ jest okresowa i $\int_0^{2\pi} g_p(x)dx = \frac{\pi}{3}(2-p)$, więc $\int_\pi^\infty \frac{g_2(x)}{x}dx$ jest zb. (kr. Dirichleta), zaś $\frac{g_p(x)}{x} = \frac{5p-4}{6} \cdot \frac{g_2(x)}{x} + \frac{2-p}{6} \cdot \frac{1}{x}$;
(g) $a_n := \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)dx \ge \int_0^\pi e^{-n\pi\sin^2 x}dx = 2\int_0^{\pi/2} \ge 2\int_0^{\pi/4} \ge 2\int_0^{\pi/4} e^{-2nx}dx = \frac{1}{n}(1 - e^{-n\pi/2})$, bo $\sin^2 x \le \frac{2}{\pi}x$ na $[0, \frac{\pi}{4}]$;
(h) $a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx \le \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi//2} e^{-n\pi\sin^2 x}dx \le \frac{2}{n\pi}\int_0^\infty e^{-4nx^2/\pi}dx = Cn^{-3/2}$, gdzie $C := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt$;
(i) $\varphi(r) := \int_0^\pi \frac{dx}{1+r\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+r}}$, wtedy $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx \in [c_{n+1}, c_n]$, gdzie $c_n = \varphi((n\pi)^p) \approx Cn^{-p//2}$ dla $p > 0$;
(j) $p > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{p-1}} = 1$, $p < 0 \Rightarrow$ podst. $t = x^p$ daje $(-\frac{1}{p})\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$;
(k) $p > 0 \Rightarrow$ podst. $t = x^p$ daje $\frac{1}{p}\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}dt$; $p < 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{p-1}} = 1$; (m) spr. że $\int_0^\infty (f(x) - \frac{\sin x}{x})dx$ jest bezwzgl. zb.

(20) Rozwiązania

(a) rozb. $\forall p \in \mathbb{R}$	(b) zb. $\iff$ $(p < 1)$ lub $(p = 1, q > 1)$	(c) zb. $\iff$ $p < 1, q < 1$
(d) zb. $\iff$ $\lvert q\rvert < 1 + p$	(e) zb.	(f) zb. $\iff$ $p = 2$
(g) rozb.	(h) zb.	(i) zb. $\iff$ $p > 2$
(j) zb. $\iff$ $0 < p < 1$	(k) zb. $\iff$ $p \neq 0$	(l) zb. $\iff$ $p \neq 0$
(m) zb.		

(21) Wskazówki:

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to -\infty}(x^2+1)f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)f(x) = 0$, skąd wynika zbieżność; podst. $x = -y$ daje $I = \int_{-\infty}^\infty (\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x})\frac{dx}{x^2+1}$, więc ...
(c) podst. $t = \log x - \frac{1}{\log x}$ (zal. rosnąca, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt$) daje sumę dwoch zb. całek, z których jedna jest $= 0$;
(e) podstawić $x = \frac{1}{t}$ i porównać z wyjściową postacią I;
(f) podst. $x = \frac{p^2}{t}$; (g) spr. wzór $4nf_n'(x) - (n-1)f_{n-2}'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1} - x^{n-1}}{(x^2+1)^n}$;
(h) podst. $x = \frac{p^2}{t}$ daje $I = -I + \dots$;
(i) podst. $x = \frac{1}{t}$; (j) 2. podst. E.;
(l) $x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2$;
(m) $\frac{d}{dx}\frac{x}{(x^4+1)} = \dots$;
(n) 1. podst. E.: $x + \sqrt{x^2+1} = t$, następnie $u = t^2$ daje $I = \int_1^\infty \frac{(u+1)du}{(3u-1)(u^2-2u+3)}$; (o) podst. $x = \frac{1}{t}$ daje (!) $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+x^{-2})dx}{x^4+x^{-4}}$, więc można podst. $x - \frac{1}{x} = u$;

(p) podst. $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

(21) Rozwiązania

(a) 2;
(b) $I = \frac{\pi}{2}$;
(c) $\frac{\pi}{4}$;
(e) $\frac{1}{2}$;
(f) $\frac{\pi}{2|p|} \log |p|$;
(g) $I_{2k+1} = 2^{-k-1} \frac{k!}{(2k+1)!!}$, $I_{2k} = 2^{-2k-1} \pi \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$;
(h) $|p|^{-n-1} I_n \log |p|$, gdzie I_n jest z (g);
(i) 0;
(j) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{2}+1)$;
(k) $n!$;
(l) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;
(m) $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi$;
(n) $\frac{1}{11}(\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi + \log \frac{9}{2})$;
(o) $\frac{\pi}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$;
(p) $\frac{\pi}{2} - 1$;
(q) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

(22) $0 \leq \int_n^{n+1} [f(n) - f(x)]dx \leq f(n) - f(n+1)$.