FAQ ANALIZA R©

Liczby rzeczywiste, ciagi

Zadanie 1. Niech $E(x) :=$ (maksymalna liczba całkowita $\leq x$). Narysować wykresy funkcji

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) - 3E(\frac{x}{3}) \in \mathbb{R}.$$

Wyprowadzić wzory:

(a) $0 \leq E(x+y) - E(x) - E(y) \leq 1$

(b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$;

(d) $\sum_{n=1}^{N} E(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}) = E(x)$, jeśli liczba $N \in \mathbb{N}$ jest dostatecznie duża.

Zadanie 2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, oraz ciąg $(b'_1, \ldots, b'_n)$ różni się od ciągu $(b_1, \ldots, b_n)$ jedynie kolejnością, to $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k > \sum_{k=1}^{n} a_k b'_k$.

Zadanie 3. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a, b \in \mathbb{R}$, aby

$$\forall x \in]0,1] : \exists k \in \mathbb{N} : a \leq kx < b?$$

Sprawdzić $a := \frac{b^2}{b+1}, b \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$?

Zadanie 5. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz dane dodatnie $x_1, \ldots, x_n$; dla $\lambda \geq 0$ oznaczmy:

$$M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{(\lambda + x_1) \cdot \cdots \cdot (\lambda + x_n)} - \lambda;$$

niech ponadto

$$A := A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n), \qquad G := G(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

Wykazać, że:

(a) $G \leq M_\lambda \leq A$ dla $\lambda \geq 0$;

(b) $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ jest niemalejącą funkcją λ;

(c) $\lim_{\lambda \to \infty} M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = A$.

Data: 15 października 2016 r.

(a) Dla $1 \le k \le n$ nierówność Cauchy'ego daje $\binom{n}{k} G^k \le \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdot \cdots \cdot x_{i_k}$; (b) Zauważyć, że z $0 \le \lambda < \mu$ wynika $M_\mu(x_1, \ldots, x_n) - M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = M_{\mu-\lambda}(y_1, \ldots, y_n) - G(y_1, \ldots, y_n)$, gdzie $y_k = \lambda + x_k$; (c) $M - \lambda = \frac{(\lambda+x_1)\cdot\cdots\cdot(\lambda+x_n)-\lambda^n}{\sum \lambda^{n-1-k} G_\lambda^k}$, gdzie $G_\lambda := G(\lambda + x_1, \ldots, \lambda + x_n)$.

Zadanie 6. Znaleźć liczbę $l \in \mathbb{R}$ oraz funkcję $h :]0, \infty[\to \mathbb{N}$ takie, że $\forall \epsilon > 0 : \forall n > h(\epsilon) : |x_n - l| < \epsilon$, jeżeli ciąg (x_n) jest określony wzorem:

(a) $x_n := \frac{100}{n} E(\frac{n}{100})$;

(b) $x_n := \sqrt{n^2 + 3n} - n$;

(c) $x_n := \sqrt[n]{n + 100}$;

(d) $x_n := \sin\left(\pi \sqrt{n^2 + 1}\right)$.

Zadanie 7. Wykazać, że:

(a) $\lim(\sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n) = \frac{1}{100}$;

(b) $\lim n \left(n + 4\sqrt{n^2 + n} - 2\sqrt{n^2 - n} - 3\sqrt{n^2 + 2n}\right) = \frac{5}{4}$;

(c) $\lim n(2\sqrt{n^2 - n + 2} - 3\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2n}) = -\frac{1}{4}$;

(d) $\lim \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^3 + \sqrt{n^5}}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{4}$;

(e) $\lim \left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}\right) = \frac{7}{3}$;

(f) $\lim n^2 \left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{2} pq(q - p)$ dla $p, q \in \mathbb{N}$;

(g) $\lim \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) = 1$;

(h) $\lim \sqrt[n]{5a^{2n} + 4a^n + 3} = \max\{1, a^2\}$ dla $a \in \mathbb{R}$;

(i) $\lim(n^7 + 7)^{-7} \sqrt{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}} = 30\sqrt{22}$;

(j) $\lim \sqrt[n]{(3 + x)^n + (1 - x)^n} = 2 + |1 + x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(k) $\lim \frac{p_1 a_1^{n+1} + \cdots + p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n + \cdots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$ oraz $\lim \sqrt[n]{p_1 a_1^n + \cdots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$, jeśli $r \in \mathbb{N}$ i liczby p_i, a_i są dodatnie;

(l) $\lim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} - \frac{2}{\sqrt[n]{4} - 1}\right) = \frac{1}{2}$;

(m) $\lim 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n}\right) = 0$;

(n) $\lim \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n}\right) = +\infty$;

(o) $\lim \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+2} \ldots \frac{n}{3n} = 0$;

(p) $\lim n[(n + 1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$;

(q) $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}\right) = 2$;

(r) $\lim \left(\frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \cdots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}\right) = 1$;

(s) $\lim \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \cdots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$;

(t) $\lim \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4} = 1$;

(u) $\lim \frac{n+2}{n^2-3} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{k^2 - 2} = 1$.

(h),(j),(k),(o),(q),(r),(t),(u) Wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach; (m),(n) Obliczyć $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$; (s) Uprościć wzór na x_n. **16.** Ciąg $(\sqrt[n]{n+100})$ jest malejący (nierówność Bernoulliego). Oszacować $\sqrt[m]{n}$ jako średnią geometryczną m liczb $n, 1, \ldots, 1$.

Zadanie 8. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru: $\{\sqrt[n]{n+100} : n \in \mathbb{N}\}$; $\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$; $\{2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R}\}$; $\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$; $\{\frac{1000^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$; $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) : n \in \mathbb{N}\}$; $\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$; $\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 9. Wyznaczyć kresy zbioru $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, zbiór punktów skupienia ciągu (x_n) oraz $\liminf x_n$ i $\limsup x_n$, jeżeli:

(a) $x_n := \sqrt[n]{n}$;

(b) $x_n := \frac{1}{n}\Big(1 + 2E(\frac{n}{\sqrt{2}})\Big)$;

(c) $x_n := \cos \frac{5\pi}{2n}$;

(d) $x_n := \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$;

(e) $x_n := \frac{(n-1)(n+5)}{n} - 5E(\frac{n}{5})$.

(e) $x_{5k+r} = r + 4 - \frac{5}{5k+r}$ dla $r \in \overline{0,4}$.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony, to ciąg (x_n) o wyrazach $x_n =: \frac{2^{n-1}a_1 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{2^{n-1} + \cdots + 2 + 1}$ jest zbieżny. Obliczyć $\lim x_n$, jeśli $a_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 2$. *Wskazówka.* $\tilde{x}_n := (1 - 2^{-n})x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to $\lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n}{n + (n-1) + \cdots + 1} = \lim a_n$.

Twierdzenie Stolza.

Zadanie 12. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to zbieżny do tej samej granicy jest także ciąg o wyrazach $x_n := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$. *Uwaga.* Twierdzenie Stolza pozwala tu jedynie stwierdzić, że opuszczenie skończonej liczby początkowych wyrazów ciągu (a_n) nie wpływa ani na zbieżność, ani na wartość granicy ciągu (x_n).

Zadanie 13. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Stolza:

$\lim \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$;

$\lim \left(\frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^5} - \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)$;

$\lim\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}}{n}-\frac{n}{2}\right)=1$;

$\lim\frac{1}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})=2$;

$\lim\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$;

$\lim\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}=\frac{2}{e}$;

$\lim\frac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}}=\frac{e^2}{2}$.

Zadanie 14. Dla danych liczb dodatnich a i b określmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n), przyjmując: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n),(b_n)$ są zbieżne oraz $\lim a_n=\sqrt{ab}=\lim b_n$.

Sprawdzić monotoniczność tych ciągów.

Zadanie 15. Wykazać, że jeżeli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony z dołu oraz $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}\leq a_n+\frac{1}{n^2}$, to jest zbieżny.

Dobrać (b_n) tak, by ciąg (a_n+b_n) był malejący i ograniczony.

Zadanie 16. Wykazać zbieżność ciągu (a_n), jeśli:

(a) $a_n := (1+\frac{1}{1^2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{n^2})$;

(b) $a_n := 1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\sqrt{2n}$;

(c) $a_n := 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ (liczba $\lim a_n\approx 0.57721566$ nazywa się *stałą Eulera*);

(d) $a_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n+1}$.

Zbadać monotoniczność ciągów (a_n) i (b_n), gdzie: (a) $b_n := (1+\frac{1}{n})a_n$; (b) $b_n := a_n+\sqrt{2n}-\sqrt{2n+1}$; (c) $b_n := a_n-\frac{1}{n}$; (d) $b_n=a_n\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}$.

Zadanie 17. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1+\cdots+a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n\searrow 0$ przy $n\to\infty$, to $\lim na_n=0$.

Zadanie 18. Wykazać, że:

(a) $\lim\frac{E(an)}{E(bn)}=\frac{a}{b}$,gdy $b\neq 0$;

(b) $\lim\frac{E(\sqrt{2n})}{E(\sqrt{n})}=\sqrt{2}$;

(c) $\lim\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=0$ dla $a>0$;

(d) $\lim\frac{n}{n+1}\frac{n}{n+2}\cdots\frac{n}{2n}=0$;

(e) jeśli $x_0 > 0$ oraz $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim n x_n = 1$;

(f) jeśli $x_0 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim 2^n x_n = \arctan x_0$;

(g) $\lim(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}) = \log 2$.

(g) Wykazać, że $\log \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \log \frac{n}{n-1}$ dla $n \geq 2$.

Zadanie 19. Zbadać zbieżność ciągu (x_n), ewentualnie obliczyć granicę:

(a) $x_n = n \log \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$;

(b) $x_n = \frac{2}{\sqrt[n]{9}-1} - \frac{3}{\sqrt[n]{27}-1}$;

(c) $x_n = \frac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}}$;

(d) $x_n = \cos \frac{2\pi n^2}{2n+1}$;

(e) $x_n = \cos \frac{\pi n^2}{n+3}$; (f) $x_n = \sin \pi\sqrt{n^2+n+1}$;

(g) $x_n = \tan(\frac{\pi}{2}\sqrt{n(n+1)})$;

(h) $x_n = \frac{n}{E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$;

(i) $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

(j) $x_n = (2 - \sqrt[n]{10})^n$;

(k) $x_n = (\log n)^{-1}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})$.

(a) $l = 2$; (b) $l = \frac{1}{2}$; (c) $l = \log \frac{3}{2} // \log \frac{5}{3}$; (d) $l = 0$; (e),(f),(g),(h) rozbieżny; (i)(i) Pokazać, że $x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $l = 0$; (j) $l = \frac{1}{10}$; (k) $l = 1$.

Zadanie 20. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

(a) $x_0 > 0$ dane, $x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1}$;

(b) $x_0 > 0$ dane, $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2x_n}$;

(c) $x_0 > 2$ dane, $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$;

(d) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2-x_n}$;

(e) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$;

(f) $x_0 \in]-1, 2[$ dane, $x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$;

(g) $x_0 > 0$ dane,$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$;

(h) $x_0 \neq \frac{2}{3}$ dane, $x_{n+1} = \frac{2x_n-1}{3x_n-2}$;

(i) $x_0 \in [-1, 1]$ dane, $x_{n+1} = \frac{10}{1+x_n^2}$;

(j) $x_0 \in]0, 1[$ dane, $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n(4 - x_n)$;

(k) $a > 0, k \in \mathbb{N}, x_0 > 0$ dane, $x_{n+1} = \sqrt[k+1]{a x_n}$.

(a),(b),(d) osc.; (b) $|x_{n+2}-1| \le \frac{1}{2}|x_n-1|$; (c) monotoniczny; (e),(j) rosnący; (f) osc.; zacząć od $x_0 \in [0,1]$; zauważyć, że $g([0,1]) \subset [0,1]$ i $g(x) \le x$ na $[0,1]$; (g),(k) malejący; (h) obliczyć $g := f \circ f$; (i) $\forall n : |x_n| \le 1$ lub $x_n \ge 5$.

(a),(g) $l=\sqrt{2}$; (b),(j),(d) $l=1$; (c) $l=3$; (e) $l=2$; (f) $l=0$; (h) zbieżny $\iff$ $x_0=\frac{1}{3}$ lub $x_0=1$; (i) rozbieżny; (k) $l=\sqrt[k]{a}$. **7.** $x_n = n\sum_k a_k\sqrt{*} = n\sum_k a_k(\sqrt{*}-n) = n\sum_k \frac{a_k(b_k n+c_k)}{n+\sqrt{*}} = x_n' + x_n''$, gdzie $x_n' = n^2\sum_k a_k b_k(\frac{1}{n+\sqrt{*}} - \frac{1}{2n}) = -n^2\sum_k a_k b_k \frac{b_k n+c_k}{2n(n+\sqrt{*})^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{8}\sum_k a_k b_k^2$, $x_n'' = n\sum_k \frac{a_k c_k}{n+\sqrt{*}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\sum_k a_k c_k$.

Zadanie 21. Korzystając z nierówności Bernoulliego wykazać, że $\forall x > -1 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{x}{1+x} \le n(\sqrt[n]{1+x}-1) \le x$. Wywnioskować z tego, że $\lim a_n(\sqrt[n]{1+b_n}-1) = \lim \dfrac{a_n b_n}{n}$, jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ i granica po prawej stronie istnieje. Sprawdzić, że: $\lim n^2(1-\sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}}) = 1$; $\lim n^2(\sqrt[n]{n+a} - \sqrt[n]{n+b}) = a-b$; $\lim n^3(\sqrt[n]{n^2+a} - \sqrt[n]{n^2+b}) = a-b$.

Zadanie 22. Dowieść, że:

(a) Jeśli $x_n > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, to albo granica $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ nie istnieje (podać przykład), albo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} =: l \in [0,1]$ (podać przykłady pokazujące, że dopuszczalne są tu wszystkie wartości $l \in [0,1]$).

(b) Jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$, to $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = 1$.

(c) Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, to $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x_n}-1) = 0$.

(b) Zauważyć, że $|\sqrt[n]{x}-1| \le |x-1|$ dla $x \ge 0$, gdyż $\sqrt[n]{x} \in [1,x]$.

Zadanie 23. Wykazać, że jeśli $r \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_r$ są dodatnie oraz $p_1+\dots+p_r = 1$, to $\lim(p_1\sqrt[n]{a_1}+\dots+p_r\sqrt[n]{a_r})^n = a_1^{p_1}\cdot\dots\cdot a_r^{p_r}$. W szczególności: $\lim(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-1)^n = ab$ (dla $a,b>0$); $\lim(p\sqrt[n]{a}-p+1)^n = a^p$ (dla $a,p\in\mathbb{R}, a>0$).

Zadanie 24. Niech dane $r \in \mathbb{N}$ oraz $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ dla $k \in \overline{1,r}$, takie że $\sum_{k=1}^r a_k = 0$, $\sum_{k=1}^r a_k b_k = 0$. Wykazać, że 1.17$\lim n\sum\limits_{k=1}^{r} a_k\sqrt{n^2+b_k n+c_k} = -\dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{r} a_k\Delta_k$, 1.4 gdzie $\Delta_k := b_k^2-4c_k$. Korzystając z tego wzoru sprawdzić, że:

$\lim n(2\sqrt{n^2+7n+3}-5\sqrt{n^2+n-4}+3\sqrt{n^2-3n+2}) = 1$;

$\lim n(2\sqrt{n^2+7n-2}-5\sqrt{n^2+n-6}+3\sqrt{n^2-3n+2}) = 1 = \lim n[2\sqrt{n^2+9n+6}-\sqrt{n-1}(5\sqrt{n+4}-3\sqrt{n})]$.

Zadanie 25. Oznaczmy $x_k := \sqrt{k} - E(\sqrt{k})$ dla $k \in \mathbb{N}$.

(a) Wykazać, że jeśli a_n dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb x_k dla $k \in \overline{n^2,(n+1)^2-1}$, tzn. $E(\sqrt{k}) = n$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(b) Wykazać, że $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n) = \frac{1}{2}$.

(a) $S_n := \sum_{k=n^2}^{n(n+2)} x_k = \sum_{l=0}^{2n} x_{n^2+l} \in [n, n+\frac{1}{2}]$, gdyż $x_{n^2+l} = \frac{l}{n+\sqrt{n^2+l}} \in [\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n}]$; stąd $a_n \in [\frac{n}{2n+1}, \frac{1}{2}]$. (b) Niech $m := E(\sqrt{n})$, wtedy $m^2 \le n \le m^2 + 2m$, więc $\sum_{k=1}^{m-1} S_k \le x_1 + \cdots + x_n \le \sum_{k=1}^{m} S_k$; stąd oszacowanie S_k daje $x_1 + \cdots + x_n \in [\frac{m(m-1)}{2}, \frac{m(m+2)}{2}]$.

Zadanie 26. Wykazać, że jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+N} = x_n$, tzn. ciąg (x_n) jest okresowy, to $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_N}{N}$.

Sprawdzić, że ciąg $(x_1 + \cdots + x_n - ns)$, gdzie $s := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_n$, jest okresowy, a więc ograniczony.

Zadanie 27. Dla zadanieanych liczb $x_1, \ldots, x_8 \in \mathbb{R}$ określmy ciąg (x_n) rekurencją $x_{n+8} = \frac{1}{8}(x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+7})$. Wykazać, że $\lim x_n = \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + 8x_8}{1 + 2 + \cdots + 8}$, dowodząc kolejno następujących faktów:

(1) Ciąg o wyrazach $s_n := x_n + 2x_{n+1} + + \cdots + 8x_{n+7}$ jest stały, więc *jeżeli* (x_n) *jest zbieżny, to* $s_1 = \lim s_n = (1 + 2 + \cdots + 8) \lim x_n$;

(2) Jeśli $\delta\{x_1, \ldots, x_8\} := \max\limits_{1\le i<j\le 8} |x_i - x_j| = \max\{x_1, \ldots, x_8\} - \min\{x_1, \ldots, x_8\}$, to $\delta\{x_8, \ldots, x_{15}\} \le \frac{7}{8}\delta\{x_1, \ldots, x_8\}$;

(3) $\delta\{x_{7r+1}, \ldots, x_{7r+8}\} \le (\frac{7}{8})^r \delta\{x_1, \ldots, x_8\}$ dla $r \in \mathbb{N}$; (4) $|x_n - x_m| \le (\frac{7}{8})^r \delta\{x_1, \ldots, x_8\}$ dla $r \in \mathbb{N}$, $m, n > 7r$.

(2) Dla $8 \le i < j \le 15$ mamy $x_i - x_j = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}(x_i - x_{j-k})$; (4) $x_n, x_m \in [\min\{x_{7r+1}, \ldots, x_{7r+8}\}, \max\{*\}]$.

Zadanie 28. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym, takim że $x_n \ge 0$, $x_{m+n} \le x_m + x_n$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że ciąg $(\frac{x_n}{n})$ jest zbieżny, a jego granica jest równa $\inf\{\frac{x_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 29. Ciąg liczbowy (x_n) nazwijmy *quasi-rosnącym*, jeżeli $\forall N \in \mathbb{N} : x_n \ge x_N$ dla *prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. Sprawdzić, że ciąg $\left(\frac{100}{n+1}E(\frac{n}{100})\right)$ jest quasi-rosnący, chociaż $x_n < x_{n-1}$, gdy n nie jest wielokrotnością 100. Wykazać, że jeśli ciąg quasi-rosnący (x_n) jest ograniczony z góry, to jest zbieżny oraz $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 30. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy (x_n) spełnia warunki: (a) $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ oraz (b) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : x_{n+2} \in [x_n, x_{n+1}]$, to jest zbieżny. [Przyjmujemy tu konwencję $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b$ lub $b \le x \le a\}$]. Podać przykład rozbieżnego ciągu (x_n) spełniającego warunki: $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} : (-1)^n(x_{n+1} - x_n) > 0$.

Zadanie 31. Wykazać, że:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1 \;\Rightarrow\; \lim x_n = 0$;

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \;\Rightarrow\;$ ciąg (x_n) jest rozbieżny.