FAQ ANALIZA R© – ZADANIA

Rachunek różniczkowy
wersja wstępna – uwaga na błędy !!!

Zadania oznaczone **(R)** mają wskazówki lub rozwiązania na końcu pliku. Zadania rozwiązywali: Grzegorz Cieciura, Katarzyna Grabowska, Alicja Dutkiewicz. Zapraszam do uzupełniania brakujących rozwiązań i rozwijania wskazówek.

Różniczkowalność, obliczanie pochodnych

Zadanie 1. **(R)** Udowodnić, że funkcja $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ określona na $]-1,0[\cup]0,\infty[$ da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na $]-1,\infty[$. Obliczyć $f(0)$, $f'(0)$. Wykazać, że f jest malejąca, a $x \mapsto (1+x)f(x)$ rosnąca. Wskazówka: przydatne oszacowania

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x, \qquad 1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \ \text{dla} \ x<1.$$

Zadanie 2. **(R)** Obliczyć pochodną $f(x) = \arctan(x) + \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Na jakim zbiorze funkcja ta jest określona?

Zadanie 3. **(R)** Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{6}{x^2}} & x \neq 0 \\ e & x = 0 \end{cases}$$

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli funkcja φ ma w otoczeniu x_0 drugą pochodną ciągłą, to istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(\varphi(x_0+h) + \varphi(x_0-h) - 2\varphi(x_0)\right).$$

Znaleźć tę granicę. Wskazówka: Zastosować twierdzenie o wartości średniej do $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x-h)$.

Zadanie 5. **(R)** Wykazać, że $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Znaleźć jawny wzór na n-tą pochodną funkcji $\arctan x$. Zbadać różniczkowalność funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{1}{2}(x-1) & |x| > 1 \end{cases}$$

Zadanie 6. **(R)** Załóżmy, że funkcje f,g mają pochodne w punkcie a. Obliczyć granice:
a) $\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$;
b) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$.

Data: 8 września 2016 r.

Zadanie 7. Dla wszystkich, którzy potrzebują praktyki w różniczkowaniu: Obliczyć pochodne poniższych funkcji wszędzie tam, gdzie są one różniczkowalne.

(a) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x^5}$; (b) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$; (c) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$;

(d) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$; (e) $f(u) = \sin^4 5x$; (f) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^4+4})$;

(g) $f(x) = \log(\log(\log x))$; (h) $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$; (i) $f(x) = 2^{\tan \frac{1}{x}}$;

(j) $f(x) = e^{\arctan^3 \sqrt{x+4}}$; (k) $f(x) = \log^2(\arcsin^3 \sqrt{x})$; (l) $f(x) = \log(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}})$;

(m) $f(x) = \sinh^3 4x$; (o) $f(x) = \tanh^5(2e^{\sqrt{x}} - 1)$; (p) $f(x) = \sinh(\log(x + \sqrt{x^2+1})$;

(r) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; (s) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$; (t) $f(x) = x^{\sin x}$;

(u) $f(x) = x^{x^2}$; (w) $f(x) = x^{x^x}$; (x) $f(x) = \log_2(x^4+1)$;

(y) $f(x) = \log_x(x^4+1)$; (z) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\sin x \log x$;

Zadanie 8. **(R)** Obliczyć:

(a) $f^{(10)}(0)$ dla $f(x) := x^2 \cos 2x$;

(b) $f^{(100)}(1)$ dla $f(x) := \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x+2}$;

(c) $f^{(10)}(3)$ dla $f(x) := \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$.

Zadanie 9. **(R)** Niech $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ i $g(0) = 0$. Wykazać, że g jest gładka w zerze i ma wszystkie pochodne równe 0.

Zadanie 10. **(R)** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}, & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że f jest: (a) klasy C^1 na $\mathbb{R}$ (wyliczyć $f'(0)$); (b) malejąca; (c) jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Sprawdzić, że funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta.

Badanie funkcji

Zadanie 11. **(R)** Badając własności funkcji $x \mapsto e^{-x}x^e$ stwierdzić, która z liczb e^π czy π^e jest większa.

Zadanie 12. **(R)** Wykazać dla $m, n \in \mathbb{N}$ nierówność $2^n > (\frac{n}{m})^m$.

Zadanie 13. Niech

$$f(x) = \frac{x \log x}{x^2 - 1}$$

dla $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$. Wykazać, że funkcję f da się dookreślić w punktach $x = 0$ i $x = 1$, tak aby była ona ciągła (ewentualnie jednostronnie). Zbadać tę funkcję i naszkicować wykres.

Zadanie 14. Zbadać przebieg i narysować wykres funkcji

$$g(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$$

Zadanie 15. **(R)** Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:

(a) $f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(c) $f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(d) $f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3//2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
(e) $f(x) := (x+1)\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 16. Niech funkcja $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna dwa razy i ma asymptotę w nieskończoności. Wykazać, że jeśli f jest wypukła, to wykres leży nad asymptotą, a jeśli wklęsła, to pod.

Zadanie 17. **(R)** Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków $W_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 18. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Dowieść, że: (1) jeśli $b > 0$, to $ab \leq e^{a-1} + b \log b$; q(2) jeśli $a \neq b$, to $e^{\frac{1}{2}(a+b)} < \frac{e^a - e^b}{a-b} < \frac{e^a + e^b}{2}$.

Zadanie 19. **(R)** Dowieść, że:

(a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ dla $x > 0$;
(b) $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$;
(c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$;
(d) $(4 - \cos x)\frac{\sin x}{x} < 3$ dla $x \neq 0$;
(e) $|\frac{1+x}{x} \arctan x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$;
(f) $1 + x\log(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

Zadanie 20. **(R)** Wykazać nierówności:
a) $(a+x)^a < a^{a+x}$ dla $a \geq e$ oraz $x > 0$;
b) $2e^{-1} < p^{\frac{p}{1-p}} + p^{\frac{1}{1-p}} < 1, \quad p \in (0,1)$;
c) $1 + x\log(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

Zadanie 21. **(R)** Dowieść, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

Granice

Zadanie 22. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - 2\sqrt{x}\right)$$

trzema sposobami: (1) rozwijając w szereg, (2) korzystając z reguły de l'Hospitala oraz (3) stosując zwykłe zabiegi algebraiczne.

Zadanie 23. Obliczyć poniższe granice (dowolnie wybraną metodą).

(a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$ (ą) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac12\tan x}{1+\cos 4x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$ (ć) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac1x}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2(x)}{x^6}$ (ę) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$ (h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ (i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2\log x}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$ (k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$ (l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

(ł) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\log(1+x)}{x^2}\right)$ (m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}-\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$ (n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

(ń) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ (o) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$ (ó) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac1x\right)^{\tan x}$

(p) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac1x}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[n]{x}\log^m x$ (s) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac1x}$

(ś) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cot(x-a)$ (t) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}$ (u) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(w) $\lim\limits_{x\to 0}\cos(ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (y) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$ (z) $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\log x)^x$

(ź) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{1}{\log(e^x-1)}}$ (ż) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$

Zadanie 24. Obliczyć poniższe granice (dowolnie wybraną metodą).

(a) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac1x\left(\dfrac1x-\cot x\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^2-x^4\log(1+x^{-2})\right)$; (e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; (f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{\log^2 x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-5}\left(x-\sqrt{1+\dfrac{x^2}{3}}\sin x\right)$; (i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-ax}{e^{bx}-bx}\right)^{x^{-2}}$;

(j) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2//2}-\cos x}{x^4}$; (l) $\lim\limits_{x\to \pi//4}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{x^{-3}}$; (n) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos(x+\dfrac1x)-\cos(x-\dfrac1x)\right)$; (o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin\frac1x}{\sin x}$;

(p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(\cos x)-\sin x}{\cos^4 x}$; (q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/^2}$; (r) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$;

(s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$; (t) $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1-x}$; (u) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\log x}}$

Zadania różne

Zadanie 25. **(R)** Sprawdzić, że:

(a) $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f(\frac{1}{x})\right) = (-1)^n x^{-n-1} f^{(n)}(\frac{1}{x})$ dla $n \in \mathbb{N}$, jeśli $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna n-krotnie;

(b) $S(f) = S(g)$, jeśli $S(f) := \frac{f^{(3)}}{f^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}\right)^2$, f jest 3-krotnie różniczkowalna oraz $g(x) = \frac{a_1 f(x)+b_1}{af(x)+b}$.

Zadanie 26. **(R)** Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_k \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, to $\exists x \in]0,1[: \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$.

Zadanie 27. **(R)** Niech $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną, taką że f'' jest ograniczona i istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wykazać, że $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Sprawdzić te założenia i tezę dla $f(x) := \frac{1}{x}\sin(x^2)$.

Zadanie 28. **(R)** Dowieść, że jeśli $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\exists\, c > 0, \alpha \le 1 : \lim_{x\to\infty}[f(x)+cx^\alpha f'(x)] = 0$, to $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Skonstruować przykłady, uzasadniające istotność poczynionych założeń $c > 0, \alpha \le 1$.

Zadanie 29. **(R)** Dowieść, że jeśli ciągła na $[0,1]$ i dwukrotnie różniczkowalna na $]0,1[$ funkcja f spełnia warunki $f(0) = f(1) = 0$ oraz $\inf\limits_{0\le x\le 1} f(x) = -1$, to istnieje $\xi \in]0,1[$, takie że $f''(\xi) \ge 8$. Pokazać, że tego oszacowania nie da się poprawić.

Zadanie 30. **(R)** Niech $T > 0$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna, przy czym $f(T) - f(0) =: L > 0$, $f'(0) = f'(T) = 0$. Wykazać, że istnieje $t \in]0,T[$ takie, że $|f''(t)| \ge 4T^{-2}L$. *Interpretacja.* Punkt materialny, poruszający się tak, że od startu do zatrzymania przebywa drogę L w czasie T, musi mieć w pewnej chwili przyspieszenie $\ge 4T^{-2}L$.

Zadanie 31. **(R)** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i dwukrotnie różniczkowalną na $]a,b[$. Wykazać, że jeśli $f(a) = f(b)$ oraz $M_2 := \sup\limits_{a<x<b} |f''(x)| < +\infty$, to $M_1 := \sup\limits_{a<x<b} |f'(x)| \le \frac{b-a}{2} M_2$. Sprawdzić to dla $f(x) := (x-a)(b-x)$.

Zadanie 32. **(R)** Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna; oznaczmy $M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ dla $k \in \{0,1,2\}$. Dowieść, że jeśli kresy M_0 i M_2 są skończone, to $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$, przy czym oszacowania tego nie da się poprawić.

Zadanie 33. **(R)** Dowieść, że:

(a) Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, funkcja $f : [x_0,x_n] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[x_0,x_1]$ i n-krotnie różniczkowalna na $]x_0,x_1[$ oraz $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$, to $\exists\, \xi \in]x_0,x_n[: f^{(n)}(\xi) = 0$.

(b) Jeśli $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i dwukrotnie różniczkowalna na $]a,b[$, to $\exists\, \xi \in]a,b[: \phi(a) - 2\phi(\frac{a+b}{2}) + \phi(b) = (\frac{b-a}{2})^2\phi''(\xi)$.

Zadanie 34. **(R)** Załóżmy, że $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ (może być $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) jest ciągła oraz ma skończone granice jednostronne $l_1 := \lim_{x\to a+} f(x), l_2 := \lim_{x\to b-} f(x)$. Dowieść, że:

(a) f jest ograniczona na $]a,b[$;

(b) jeśli $l_1 = l_2$, to f przyjmuje co najmniej jeden ze swoich kresów na $]a,b[$;

(c) jeśli $l_1 = l_2$ i f jest różniczkowalna, to $\exists\, \xi \in]a,b[: f'(\xi) = 0$.

Zadanie 35. Dowieść, że jeśli funkcja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ (dopuszczamy $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) jest n-krotnie różniczkowalna oraz $\forall k \in \overline{0,n-1} : \lim_{x\to a+} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to b-} f^{(k)}(x)$, to $f^{(n)}$ ma co najmniej n pierwiastków w $]a,b[$. Korzystając z tego pokazać, że tzw. *wielomian Laguerra* $L_n(x) := e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$ ma dokładnie n dodatnich pierwiastków.

Wskazówki i rozwiązania

(1) Podstawmy $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$$

Żeby f była ciągła w 0, $f(0)$ musi być równe e. Policzmy pochodną, i sprawdźmy, czy funkcja jest różniczkowalna w 0.

$$f'(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = (e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)})' = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\,(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x} * \frac{1}{1+x}) = (1+x)^{\frac{1}{x}}\,\frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2}e \qquad \Rightarrow f \text{ jest różniczkowalna w 0.}$$

$$f \text{ malejąca} \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}}\,\frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) < 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$$

Wiadomo, że $e^a > 1 + a$, w szczególności dla $a = \frac{-x}{1+x}$, więc powyższa nierówność jest prawdziwa.

(2) Proste rachunki pokazują, że funkcja ma pochodną równą zero. Określona jest na $\mathbb{R}$. Funkcja jest więc stała, jej wartość można określić znajdując wartość w jednym punkcie, np w $x = 0$: $f(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

(5)

$$y = \arctan x$$

Z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej:

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{(\frac{\sin y}{\cos y})'} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Szukamy wzoru na n-tą pochodną:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{\frac{i}{2}x - \frac{i}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{(x+i)(x-i)} = \frac{i}{2}\frac{x-i-x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right)\\
y'' &= \frac{i}{2}\left(\left(\frac{1}{x+i}\right)' - \left(\frac{1}{x-i}\right)'\right) = \frac{i}{2}\left(-\frac{1}{(x+i)^2} + \frac{1}{(x-i)^2}\right)\\
y''' &= \frac{i}{2}\left(-\left(\frac{1}{(x+i)^2}\right)' + \left(\frac{1}{(x-i)^2}\right)'\right) = \frac{i}{2}\left(2\frac{1}{(x+i)^3} - 2\frac{1}{(x-i)^3}\right)\\
&\vdots\\
y^{(n)} &= \frac{i}{2}(-1)^n(n-1)!\left(-\frac{1}{(x+i)^n} + \frac{1}{(x-i)^n}\right)
\end{aligned}$$

Dowód indukcyjny:

(1) Dla $n = 1$:

$$y' = \frac{i}{2} * (-1) * 0!\left(-\frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right)$$

(2) Załóżmy, że postulowany wzór jest poprawny dla $n = k$. W takim razie:

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)} &= \left(\frac{i}{2}(-1)^k(k-1)!\left(-\frac{1}{(x+i)^k} + \frac{1}{(x-i)^k}\right)\right)' =\\
&= \frac{i}{2}(-1)^k(k-1)!\left(-\left(\frac{1}{(x+i)^k}\right)' + \left(\frac{1}{(x-i)^k}\right)'\right) =\\
&= \frac{i}{2}(-1)^k(k-1)!\left(k\frac{1}{(x+i)^{k+1}} - k\frac{1}{(x-i)^{k+1}}\right) =\\
&= \frac{i}{2}(-1)^{k+1}k!\left(-\frac{1}{(x+i)^{k+1}} + \frac{1}{(x-i)^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

(3) Na mocy indukcji matematycznej dowód jest poprawny dla dowolnego n.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & |x| \le 1 \\ \frac{\pi}{4}\text{sgn } x + \frac{1}{2}(x-1) & |x| > 1 \end{cases}$$

Widać, że f jest ciągła i różniczkowalna dla x z przedziałów $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ i $(1,\infty)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & |x| > 1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{funkcja sgn } x \text{ jest ciągła na tych przedziałach}$$

Sprawdźmy, czy jest ciągła w $x=1$ i $x=-1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\pi}{4}\text{sgn } x + \frac{1}{2}(x-1)\right) = \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ f(1) &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \arctan x = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4} \\ \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-}\left(\frac{\pi}{4}\text{sgn } x + \frac{1}{2}(x-1)\right) = -\frac{\pi}{4} - 1 \end{aligned}$$

W punkcie $x=-1$ funkcja jest nieciągła, a więc też nieróżniczkowalna. W punkcie $x=1$ granica górna, dolna i wartośc funkcji są sobie równe i funkcja jest ciągła. Sprawdźmy, czy jest różniczkowalna:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Granica górna i dolna są równe, więc f jest różniczkowalna w $x=1$.

(8) (a) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$; (b) $\frac{1}{1+u^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n u^{2n}$, $|u|<1$, $u := x-1$; (c) podstawiając $x = 3+2u$ mamy $f(x) = (1+u)(1-u^2)^{-1//2}$; zastosować wzór Maclaurina dla $(1+v)^{-\frac{1}{2}}$.

(9)

$$\ln f(x) = \ln e^{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2} \quad \xrightarrow{x\to 0} \quad -\infty$$

Z ciągłości logarytmu wnioskujemy, że

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(x)$$

czyli funkcja jest ciągła w $x=0$. Różniczkujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f''(x) &= -\left(\frac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \frac{6x^2-4}{x^6}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad P_n(x) \text{ jest wielomianem stopnia } n \end{aligned}$$

$P_n(x)$ jest ograniczony kiedy x dąży do 0. Podstawmy $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{3n}}{e^{t^2}} = 0 \qquad \leftarrow \text{ bo funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż wielomianowa}$$

$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$, więc $f^{(n)}$ jest ciagła i różniczkowalna. Z dowolności n wynika, że f jest funkcją gładką.

(6) a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)+a(f(a)-f(x))}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}(f(a) + a\frac{f(a)-f(x)}{x-a}) = f(a) - af'(a) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=\\ &= \lim_{x\to a}(g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\frac{g(a)-g(x)}{x-a}) = g(a)f'(a)-f(a)g'(a)\end{aligned}$$

(10) (c) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

(??) $f(0)=e, f'(0)=-\frac{e}{2}$.

(11) Wiadomo, że:

$$e^x > x+1$$

Weźmy $x=\frac{\pi}{e}-1$.

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{e}-1} &> \frac{\pi}{e}-1+1\\ e^{\frac{\pi}{e}} &> \pi\\ (e^{\frac{\pi}{e}})^e &> \frac{\pi}{e}^e\\ e^\pi &> \pi^e\end{aligned}$$

(12) Należy wykazać, że $2>x^{-x}$ dla wszystkich $x=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}$

(15)(a) Wart.kryt.: $f(-3)=\sqrt{11}$ (min.), $f(1)=5\sqrt{3}$ (maks.lok.), $f(2)=\frac{7}{2}\sqrt{6}$ (min.lok.); p.przeg.: $f(-\frac12)=\frac{13}{2}$, $f'(-\frac12)=\frac{25}{9}$, $f(\frac75)=\frac{13}{5}\sqrt{11}$, $f'(\frac75)=-\frac{4}{9\sqrt{11}}$; asymptoty: $y=\pm(x+3)$ dla $x\to\pm\infty$; wykres *nad* asymptotami. (b) $f(-1)=e^{-1}$ (maks.lok.), $f(2)=4e^{\frac12}$ (min.lok.); p.przeg.: $f(-\frac25)=\frac85e^{-\frac52}$; asympt.: $y=x+3$ dla $x\to\pm\infty$; $x=0$ | as.pion. dla $x\to 0+$. (c) $f(1)=-2e^{-2}$ | jedyna wart.kryt. (min.lok.); p.przeg.: $x=6\pm\sqrt{30}$; asympt. dla $x\to\pm\infty$: $y=x-2$ (przecina wykres dla $x\approx 3.5$). (d) $f(\pm\frac{1}{\sqrt3})=\pm\frac{\pi}{2}$ | maks. i min.; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\frac{\pi}{2}$ (e) P.przeg.: $f(1)=\frac{\pi}{2}$; min.: $f(x_0)\approx -0.23$ dla $x\approx -0.45$; asymptota: $y=-1\pm\frac{\pi}{2}(x+1)$.

(17) Zbadać $x\mapsto e^{-x}W_n(x)$

(18) (2) Pomnożyć stronami przez e^{-b}.

(20) a)

$$\begin{aligned}(a+x)^a &< a^{a+x}\\ a\ln(a+x) &< (a+x)\ln a\end{aligned}$$

Rozważmy $f(x)=a\ln(a+x)$ i $g(x)=(a+x)\ln a$.

$$\begin{aligned} f(0)=g(0) &= a\ln a\\ f'(x)=\frac{a}{a+x} &\leq 1\\ g'(x)=\ln a &\geq 1 \qquad \text{bo } a>e\\ f'(x) &< g'(x)\\ f(x) &< g(x)\end{aligned}$$

b) Rozważmy $f(p)=p^{\frac{p}{1-p}}+p^{\frac{1}{1-p}}=p^{\frac{1}{1-p}}(p^{-1}+1)$ oraz $g(p)=\ln f(p)$.

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{1}{1-p}\ln p+\ln(\frac1p+1)=\frac{1}{1-p}\ln p+\ln(p+1)-\ln p=\frac{p}{1-p}\ln p+\ln(1+p)\\ g'(p) &= \frac{1}{1-p}+\frac{1}{1+p}+\frac{\ln p}{(1-p)^2}=\frac{1}{1-p^2}+\frac{\ln p}{(1-p)^2}=\frac{1}{(1-p)^2}\left(\frac{(1-p)^2}{1-p^2}+\ln p\right)=\\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left(\frac{(1-2p-p^2+2p^2}{1-p^2}+\ln p\right)=\frac{1}{(1-p)^2}\left(1+2\frac{p(p-1)}{1-p^2}+\ln p\right)=\\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left(1-2\frac{p}{1+p}+\ln p\right)=\frac{1}{(1-p)^2}\left(\ln p-\frac{p-1}{1+p}\right)<0\end{aligned}$$

$$\lim_{p\to0} g(p)>g(p)>\lim_{p\to1} g(p) \qquad \lim_{p\to0} f(p)>f(p)>\lim_{p\to1} f(p)$$

$$\lim_{p\to 1} f(p) = \lim_{p\to 1}\left(e^{\frac{p\ln p}{1-p}} + e^{\frac{\ln p}{1-p}}\right) = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}$$

ponieważ $\lim_{p\to 1}\frac{p\ln p}{1-p} = \lim_{p\to 1}\frac{\ln p}{\frac{1-p}{p}} \overset{H}{=} \lim_{p\to 1}\frac{\frac{1}{p}}{-\frac{1}{p^2}} = \lim_{p\to 1} -p = -1$

$$\lim_{p\to 1}\frac{\ln p}{1-p} \overset{H}{=} \lim_{p\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{p\to 1}\frac{-1}{x} = -1$$

$$\lim_{p\to 0} f(p) = \lim_{p\to 0}\left(e^{\frac{p\ln p}{1-p}} + p^{\frac{1}{1-p}}\right) = 0 + e^0 = 1$$

ponieważ $\lim_{p\to 0}\frac{p\ln p}{1-p} = \lim_{p\to 0}\frac{\ln p}{1/p-1} \overset{H}{=} \lim_{p\to 0}\frac{\frac{1}{p}}{\frac{-1}{p^2}} = \lim_{p\to 0}\frac{-1}{p} = -\infty$

c) Rozważmy $f(x) = 1 + x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

$$f'(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \log(x+\sqrt{1+x^2}) +$$

$$+\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} * \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$f(0)=0 \qquad f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0 \qquad f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall_{x\in R} f(x)\geq 0$$

(19) $f(x) := \frac{1+x}{x}\arctan x$; skoro $f(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ oraz $f(1) = \frac{\pi}{2}$, to wystarczy sprawdzić monotoniczność f; otóż $f'(x) = \frac{1}{x^2}g(x)$, $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1} - \arctan x$, $g'(x) = \frac{2x(1-x)}{(x^2+1)^2}$, więc $\forall x\leq 1 : g(x)\geq g(0) = 0$, czyli $f'(x)\geq 0$.

(21) Punkty przegięcia leżą na prostej $y = \frac{3}{4}(x-1)$.

(25) (b) $S(f) = D(f)' - \frac{1}{2}D(f)^2$, gdzie $D(f) := \frac{f''}{f'}$. Lepszy sposób: sprawdzić, że $S(af+b) = S(f)$, $S(f^{-1}) = S(f)$, po czym zauważyć, że $g - \frac{a_1}{a} = \ldots$ dla $a\neq 0$.

(26) Tw. Rolle'a.

(27) Ze wzoru Taylora $\forall x,h>0 : \exists\xi : |f'(x)| \leq \frac{1}{h}|f(x+h)-f(x)| + \frac{h}{2}|f''(\xi)|$; dla zadanego $\epsilon>0$ wziąć $h := \frac{\epsilon}{M}$, $M := \sup_\xi |f''(\xi)|$.Dla $c\neq 0$ niech $f(x) := e^{g(x)}$, gdzie $g(x) := \frac{x^{1-\alpha}}{c(\alpha-1)}$ gdy $\alpha\neq 1$, $g(x) := \frac{1}{c}\log x$, gdy $\alpha = 1$. Wtedy $f(x) + cx^\alpha f'(x) = 0$, a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ jest $= 1$ (gdy $\alpha>1$) lub $= +\infty$ (gdy $\alpha\leq 1, c<0$).

(28) Zastosować tw. de l'Hospitala, licząc $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}}$ dla $g(x) := \int\frac{dx}{cx^\alpha}$.

(29) Napisać wzór Taylora dla $f(0)$ i $f(1)$

(30) Wyrazić $f(T//2)$ wzorem Taylora, biorąc $t_0 = 0$ (gdy $f(T//2) - f(0)\geq L//2$) lub $t_0 = T$ (w przec. razie).

(31) $|f'(x_0)(b-a)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_1)(a-x)^2 - f''(\xi_2)(b-x)^2| \leq \frac{M_2}{2}[(a-x_0)^2 + (b-x_0)^2]$, przy czym $[\ldots]\leq (b-a)^2$.

(32) $\forall x,h : \exists\xi_+,\xi_- : f(x\pm h) = f(x)\pm f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(\xi_\pm)$. $f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)] - \frac{h}{4}[f''(\xi_+) - f''(\xi_-)]$; stąd $\forall h>0 : |f'(x)|\leq\frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$, co daje $|f'(x)|\leq\sqrt{2M_0M_2}$. Rozważyć $f(x) := (-1)^n(x-n)(n+1-x)$, $n := E(x)$.

(33) (a) Indukcja wzgl. n. (b) Zastosować $(a)_{n=2}$ do $f(x) := \phi(x) - q(x)$, dobierając trójmian kwadratowy $q(x)$ tak, by $f(a) = f(\frac{a+b}{2}) = f(b)$.

(34) (a),(b) Funkcja $F :]\arctan a, \arctan b[\ \to\mathbb{R}$, $F(t) := f(\tan t)$, przedłuża się do funkcji ciągłej na (zwartym) domknięciu swej dziedziny; (c) skorzystać z tw.Fermata lub z tw. Rolle'a.