FAQ ANALIZA R$^{©}$

Topologia metryczna

Zadanie 1. Sprawdzić, że d określa metrykę na $\mathbb{R}$. Opisać kule względem tej metryki.

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & xy \geq 0, \\ \sqrt{x^2+xy+y^2}, & xy < 0. \end{cases}$$

Zadanie 2. *Metryka rzymska.* Niech $X = \mathbb{R}^2$, $|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x_1y_2 - y_1x_2 = 0, \\ |x|+|y|, & x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Pokazać, że d jest metryką, opisać kule względem tej metryki.

Zadanie 3. Sprawdzić, że funkcja

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

jest metryką na $\mathbb{R}$. Czy metryka ta jest równoważna metryce $\rho(x,y) = |x-y|$? Czy topologia zadawana przez tę metrykę jest identyczna z kanoniczną? *Wskazówka: $d(x,y) = f(|x-y|)$ dla $f(a) = \frac{a}{1+a}$. Dla dowodu nierówności trójkąta przyda się wykazać najpierw, że $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$ i f jest rosnąca.*

Zadanie 4. (metryka jeziora) Niech $K = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (x_1)^2+(x_2)^2 < 1\}$. Sprawdzić, że funkcja

$$d : K \times K \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \min\{\|x-y\|, \ 2-\|x\|-\|y\|\},$$

gdzie $\|x\| = \sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}$, jest metryką na K. Narysować kulę o środku w $(0,\frac{3}{4})$ i promieniu $\frac{1}{2}$ oraz kulę o środku w $(\frac{1}{2},0)$ i promieniu $\frac{1}{4}$. Obliczyć średnicę K. Czy (K,d) jest przestrzenią zupełną?

Zadanie 5. Sprawdzić, że wzór

$$d(x,y) := ||x|-|y|| + |\mathrm{sgn} x - \mathrm{sgn} y|$$

określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć kule (względem d) o środku $x_0 = 4$ i promieniach $r = 3,4,5,6$. Pokazać, że $K(4;r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leq 2$ lub $r \geq 6$.

Zadanie 6. Niech Z będzie dowolnym zbiorem niepustym, $P := \{A \in 2^Z \ : \ A \text{ skoczony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A,B) := |A \div B|$ określa metrykę w zbiorze P. Opisać kule i odcinki w P względem tej metryki.

Zadanie 7. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) = \min\{|x-y|, 1-||x|-|y||\}$ określa metrykę na zbiorze $M =]-1,1[\subset \mathbb{R}$. Obliczyć średnicę tej przestrzeni metrycznej, tzn liczbę $\sup\{d(x,y) : \ x,y \in M\}$.

Data: 2 listopada 2016 r.

Zadanie 8. Wykazać, że wzór $d(x,y)=\min\{|x-y|,\Im(x+y)\}$ określa metrykę w zbiorze $H=\{z\in\mathbb{C}:\ \Im z>0\}$. Wykazać także, że ciąg $z_n=n+\frac{i}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny w tej przestrzeni. Sprawdzić, że metryka d i metryka euklidesowa nie są równoważne w H ale zadają tę samą topologię.

Zadanie 9. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Odcinkiem metrycznym w X o końcach $a,b\in X$ nazywamy zbiór

$$[a,b]=\{x\in X:\ d(a,b)=d(a,x)+d(x,b)\}$$

Opisać odcinki metryczne dla $X=\mathbb{R}^2$ i metryk d_1, d_2, d_∞

Zadanie 10. (R) Udowodnić, że (a) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony, (b) jeśli (x_n), (y_n) są ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X,d) to ciąg liczbowy $d_n=d(x_n,y_n)$ jest zbieżny.

Zadanie 11. Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X,d). Rozważmy następujące warunki $(Ca),(C_1),(C_2),(C_3)$:

(Ca) $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}:\forall m,n\geq N: d(x_m,x_n)\leq\epsilon$;
(C_1) $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N: d(x_n,\,x_N)\leq\epsilon$;
(C_2) $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}:\exists x\in X:\forall n\geq N: d(x_n,x)\leq\epsilon$;
(C_3) $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N: d(x_n,x_{n+1})\leq\epsilon$.

Wykazać, że $(C_1)\iff(C)\iff(C_2)$, $(C)\Longrightarrow(C_3)$. Znaleźć przykład pokazujący, że nie zachodzi $(C_3)\Longrightarrow(C)$.

Zadanie 12. Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X,d). Załóżmy, że dwa podciągi $y_k=x_{p(k)}$, $z_k=x_{r(k)}$, gdzie p,r są rosnącymi funkcjami z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, zawierają łącznie prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n). Wykazać, że ciąg (x_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy (y_k) i (z_k) są zbieżne i ich granice są jednakowe.

Zadanie 13. Niech (x_n) i (y_n) będą zbieżnymi ciągami w przestrzeni metrycznej (X,d). Załóżmy pondto, że zbiory ich wyrazów są równe, tzn

$$A=\{x_n:\ \ n\in\mathbb{N}\}=\{y_n:\ \ n\in\mathbb{N}\}.$$

Wykazać, że granice (x_n) i (y_n) są równe lub zbiór A jest skończony.

Zadanie 14. Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X,d). Wykazać, że (a) Jeżeli $\lim d(x_n,a)=+\infty$ dla pewnego $a\in X$ to zbiór wyrazów ciągu (x_n) jest domknięty; (b) Jeśli (x_n) jest zbieżny to zbiór $\{x_n:\ \ n\in\mathbb{N}\}\cup\{\lim x_n\}$ jest domknięty.

Zadanie 15. (R) Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X,d). Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy o wyrazach $\delta_n=d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_n,x_{n+1})$ jest zbieżny to ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie 16. Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech A oznacza podzbiór X. Dowieść, że

(1) $\mathrm{Fr}A=\bar{A}\setminus\mathrm{Int}A=(A\setminus\mathrm{Int}A)\cup(\bar{A}\setminus A)$;
(2) $\bar{A}=A\cup\mathrm{Fr}A$;

(3) $\mathrm{Int}A = A \setminus \mathrm{Fr}A$;
(4) $X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(5) A jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{Fr}A \subset A$;
(6) A jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy $A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$.

Zadanie 17. Udowodnić, że odcinek metryczny z zadania **9** jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 18. (R) Niech A i B będą podzbiorami przestrzeni metrycznej X. Dowieść, że jeśli A i B są otwarte lub A i B są domknięte to $A \setminus B$ i $B \setminus A$ są rozgraniczone.

Zadanie 19. (R) Niech (X, d), (Y, ρ) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$ odwzorowaniem, a $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \ y = f(x)\}$ jego wykresem. Wykazać, że jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym to $\mathrm{Graph}(f)$ jest zbiorem domkniętym. Znaleźć kontrprzykład pokazujący, że twierdzenie odwrotnie nie jest prawdziwe. Wykazać także, że przy dodatkowym założeniu, że Y jest zwarta, twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

Zadanie 20. (R) Dowieść, że **(a)** jeśli podzbiory A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A + B := \{a + b \ : \ a \in A,\ b \in B\}$ też jest zwarty; **(b)** jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A + B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$, dla których zbiór $A + B$ nie jest domknięty.

Zadanie 21. (R) Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niepustych zbiorów zwartych, takich, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi zawieranie $F_{n+1} \subset F_n$. Udowodnić, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Zadanie 22. (R) Niech X będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić następującą równoważność:

$$(X \text{ jest przestrzenią zwartą}) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{każdy ciąg w } X\text{, mający dokładnie} \\ \text{jeden punkt skupienia, jest zbieżny} \end{array} \right)$$

Wskazówka nieobowiązkowa: Dowodząc $\Leftarrow$ *można zacząć od pokazania, że z warunku po prawej stronie wynika, że każdy ciąg ma punkt skupienia.*

Zadanie 23. Niech A, B będą podzbiorami przestrzeni metrycznej X. Udowodnić, że jeśli A, B są spójne i $A \cap B \neq \emptyset$ to $A \cup B$ też jest spójny.

Zadanie 24. (R) W praktycznym dowodzeniu spójności lub niespójności przydają się następujące dwa fakty: **(1)** Jeżeli A jest spójny oraz $A \subset O_1 \cup O_2$ oraz O_1 i O_2 są rozgraniczone (to znaczy $\overline{O_1} \cap O_2 = O_1 \cap \overline{O_2} = \emptyset$) to $A \subset O_1$ lub $A \subset O_2$. **(2)** Jeśli $A \subset O_1 \cup O_2$ oraz $A_1 = O_1 \cap A$, $A_2 = O_2 \cap A$ są niepuste i ponadto O_1, O_2 są rozgraniczone to A jest niespójny.

Zadanie 25. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ zbadać ODZS zbioru

$$A_p = \{t \in \mathbb{R} : \ \ 2t^2 - 3t \leq pe^t\}.$$

Zadanie 26. Zbadać, czy podzbiór $\mathbb{R} \supset Z_p = \{px^2 - 2x + (2p - 1) \leq 0\}$ jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny, w zależności od wartości $p \in \mathbb{R}$.

Zadanie 27. (R) Niech X będzie przestrzenią ograniczonych ciągów liczbowych metryką
$$d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup\{|x_n - y_n|,\quad n\in\mathbb{N}\}.$$
Zbadać ODZS zbioru ciągów zbieżnych do 0.

Zadanie 28. Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$ z metryką
$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$
Czy metryka $\rho(m,n) = |m-n|$ zadaje tę samą topologię?

Zadanie 29. W zbiorze $\mathcal{C}([0,1])$ funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ wprowadzamy metrykę $d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}(|f(t)-g(t)|)$. Zbadać otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru $Z = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) :\ \ f(0)f(1) > 0\}$.

Zadanie 30. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wyposażonej w odległość euklidesową d dla dowolnego podzbioru $A\subset\mathbb{R}^2$ i $\varepsilon\geq 0$ definiujemy
$$A_\varepsilon = \{x\in X : \exists a\in A : d(x,a)\leq\varepsilon\}$$
Rozważmy następujące implikacje: (D) A domknięty $\Rightarrow A_\varepsilon$ domknięty; (O) A otwarty $\Rightarrow A_\varepsilon$ otwarty; (Z) A zwarty $\Rightarrow A_\varepsilon$ zwarty; (S) A spójny $\Rightarrow A_\varepsilon$ spójny. Udowodnić, że implikacje te są prawdziwe. *Uwaga: nie jest to prawda w każdej przestrzeni wyposażonej w odległość i topologię związaną z tą odległością!*

Zadanie 31. (R) Zbadać, czy podane niżej podzbiory przestrzeni metrycznej (X,d) są **o**twarte, **d**omknięte, **z**warte, **s**pójne:

(a) $X=\mathbb{R}$, $A_p = \{x\in\mathbb{R} :\ xe^{x-x^2}\leq p\}$ w zależności od wartości $p\in\mathbb{R}$;
(b) $X=\mathbb{R}$, $Z_p = \{x\in\mathbb{R} :\ px^2-2x+2p-1\leq 0\}$ w zależności od wartości $p\in\mathbb{R}$;
(c) $X=\mathbb{R}$, $M = \{\frac{n}{m+n}+\frac{p}{m+n+p},\ n,m,p\in\mathbb{N}\}$;
(d) $X = C([0,1],\mathbb{R})$, $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$, $Z = \{f\in X : f(0)f(1) > 1\}$.

Zadanie 32. Wykazać, że jeśli $f : [a,b[\to [a,b[$ jest ciągłą surjekcją to f ma punkt stały. Wskazówka: własność Darboux dla funkcji ciągłych.

Zadanie 33. (R) Zbadać ciągłość następujących funkcji $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Zadanie 34. Wyznaczyć punkty ciągłości funkcji $f : D\to\mathbb{R},\ \ D\subset\mathbb{R},$ jeśli

(1) $f(x) := \lim_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ dla $x>0$;
(2) $f(x) := \begin{cases} x(x^2-2), & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$
(3) $f(x) := \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q}, \\ \sin\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

Zadanie 35. Wykazać, że jeżeli X i Y są przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem, to następujące warunki są równoważne: **(a)** f jest ciągłe (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych w Y są otwarte w X); **(b)** przeciwobrazy zbiorów domkniętych w Y są domknięte w X; **(c)** $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego podzbioru $A \subset X$.

Zadanie 36. (R) Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem ciągłym. Wykazać, że **(a)** jeśli $A \subset X$ jest domknięty, to $f(A)$ jest domknięty; **(b)** jeśli f jest injektywne, to jest homeomorfizmem X na $f(X)$.

Zadanie 37. (R) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zwartą, a $\varphi : X \to X$ izometrią. Wykazać, że φ jest surjekcją (a więc bijekcją, bo każda izometria jest injekcją).

Zadanie 38. (R) Wykazać, że jeśli $X \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $f : X \to \mathbb{R}$ ciągłą injekcją, to f jest ściśle monotoniczna.

Zadanie 39. (R) Niech I będzie otwartym odcinkiem w $\mathbb{R}$. Udowodnić, że jeśli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła i dla wszystkich $a, b \in I$, $a < b$, spełnia nierówność $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$. to funkcja jest wypukła.

Zadanie 40. (R) Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to f jest stała.

Zadanie 41. (R) Niech $\mathbb{R}^2 \supset C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ i $f : C \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Udowodnić, że f nie jest surjektywne ani injektywne.

Rozwiązania

(10) (a) Niech (x_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej. Przypomnijmy warunek Cauchy'ego:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > N \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy stosowne N. Z warunku Cauchy'ego wynika, że dla $m > N$ $d(x_{N+1}, x_m) < \varepsilon$. Niech $R = \max\{d(x_{N+1}, x_1), d(x_{N+1}, x_2), \ldots, d(x_{N+1}, x_N), \varepsilon\}$. R jest skończoną liczbą dodatnią. Wszystkie wyrazy ciągu należą do kuli $K(x_{N+1}, R)$, ciąg jest więc ograniczony. (b) Wykażemy, że ciąg liczbowy (d_n) jest ciągiem Cauchy'ego, co w zbiorze liczb rzeczywistych z normalną topologią jest równoważne zbieżności. Potrzebne będą następujące rachunki:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

zatem

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \tag{1}$$

Zamieniamy miejscami n i m

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

zatem

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) \tag{2}$$

i ostatecznie z (1) i (2)

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$, znajdujemy stosowne N_x i N_y występujące w warunkach Cauchy'ego dla ciągów (x_n) i (y_n) dla $\frac{\varepsilon}{2}$. Definiujemy następnie $N = \max\{N_x, N_y\}$. Wiadomo więc, że

$$|d_n - d_m| = |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Ciąg (d_n) spełnia więc warunek Cauchy'ego.♣

(15) Niech δ będzie granicą ciagu δ_n. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji granicy ciągu wynika istnienie N takiego, że dla $n > N$ $\delta_n \in]\delta - \frac{\varepsilon}{2}, \delta + \frac{\varepsilon}{2}[$. Jeśli więc $n, m > N$ to $|\delta_n - \delta_m| < \varepsilon$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $m > n$.

$$|\delta_n - \delta_m| = d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_m, x_{m+1}).$$

Z nierówności trójkąta, użytej wielokrotnie, dostajemy

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_m, x_{m+1}) = |\delta_n - \delta_m| < \varepsilon$$

Powyższa nierówność zachodzi dla $m, n > N$. Mamy więc dla $m, n > N + 1$ nierówność

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon,$$

tzn (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego. ♣

(18) Niech A, B będą otwarte. Załóżmy, że $A \setminus B$ i $B \setminus A$ nie są rozgraniczone, tzn. przynajmniej jeden ze zbiorów $\overline{A \setminus B} \cap B \setminus A$ jest $\overline{B \setminus A} \cap A \setminus B$ nie jest pusty. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że niepusty jest pierwszy z wymienionych zbiorów. Niech więc x będzie elementem $\overline{A \setminus B} \cap B \setminus A$. Punkt x należy więc do B, nie należy do A, ale jest punktem skupienia $A \setminus B$. Możemy więc wybrać ciąg (x_n) zbieżny do x i taki, że wszystkie x_n są elementami A i nie są elementami B. B jest otwarty, zatem zawarty jest w B wraz z pewną kulą o promieniu ε. Ze zbieżności (x_n) wynika, że prawie wszystkie elementy (x_n) należą do kuli o środku w x i promieniu ε, należą więc też do B. Jest to jednak sprzeczne z definicją x_n.

Niech teraz A, B będą domknięte. Podobnie załóżmy, że $A \setminus B$ i $B \setminus A$ nie są rozgraniczone, tzn istnieje $x \in \overline{A \setminus B} \cap B \setminus A$. Skoro x jest w domknięciu $A \setminus B$, to jest granicą pewnego ciągu (x_n) o wyrazach z $A \setminus B$. W szczególności ciąg ten jest ciągiem w A. A jest domkniete, więc granica tego ciągu, x, jest też elementem A. Jednocześnie nie może więc być elementem $B \setminus A$. ♣

(19) Niech (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem skupienia zbioru Graph(f). Oznacza to, że istnieje ciąg (x_n, y_n) zbieżny do (x_0, y_0) i $f(x_n) = y_n$. Skoro $x_n \to x_0$ i f jest ciągła, to $y_n = f(x_n) \to f(x_0)$. Wnioskujemy zatem, że $y_0 = f(x_0)$, czyli $(x_0, y_0) \in$ Graph(f). Wykres zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, jest więc domknięty. Twierdzenie odwrotne w ogólnym przypadku nie jest prawdziwe, gdyż funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorami $f(x) = 0$ dla $x \leq 0$ i $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$ jest nieciągła w $x = 0$ jednak jej wykres jest domknięty w $\mathbb{R}^2$. Jeśli jednak przestrzeń wartości funkcji f jest zwarta, twierdzenie odwrotne jest prawdziwe. Załóżmy że tak nie jest. Istnieje więc funkcja nieciągła, której wykres jest domknięty. Niech x_0 będzie punktem nieciągłości f. Istnieje wtedy ciąg x_n zbieżny do f taki, że $f(x_n)$ jest oddzielony od $f(x_0)$. Dokładniej istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnego n, $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. Ciąg $y_n = f(x_n)$ jest ciągiem elementów zwartej przestrzeni y, zawiera więc podciąg y_{n_k} zbieżny do pewnego y_0. Ciąg (x_{n_k}, y_{n_k}) jest ciągiem punktów wykresu zbieżnym do (x_0, y_0). Z domkniętości wykresu wynika, że (x_0, y_0) należy do tego wykresu, więc $f(x_0) = y_0$. Jest to jednak sprzeczne z definicją x_n – wartości f na x_n miały być oddzielone od $f(x_0)$.♣

(20) Jeżeli punkt x należy do domknięcia $A + B$, to znaczy, że istnieje ciąg elementów $A + B$ zbieżny do x. Ciąg z $A + B$ można zawsze zapisać jako sumę ciągów a_n z A i b_n z B. Ciąg a_n jest ciągiem w zbiorze zwartym więc ... a skoro cały ciąg $a_n + b_n$ jest zbieżny, to o b_n wiadomo, że ... a z domkniętości B wynika że ... ♣

(21) Zbiór A_p można zapisać jako $f^{-1}(]-\infty,p])$ dla funkcji rzeczywistej $f(x) = e^{-t}(2t^2 - 3t)$. Wiadomo więc, że niezależnie od wartości p zbiór będzie domknięty. Co do reszty własności można się wypowiedzieć dopiero po dokładniejszym zbadaniu zbioru A_p. W tym celu należy naszkicować wykres funkcji f. Okazuje się, że funkcja ta jest ciągła, różniczkowalna, w $-\infty$ dąży do $+\infty$, dalej maleje poprzez miejsce zerowe dla $x = 0$aż do minimum (globalnego), które ma w punkcie $x = \frac{1}{2}$. Dalej funkcja rośnie poprzez miejsce zerowe do maksimum (lokalnego) w punkcie $x = 3$ i dalej maleje do zera w $+\infty$. Wartość w minimum $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ i w maksimum $f(3) = \frac{9}{e^3}$. Rozwiązanie:

$p \in [\frac{9}{e^3}, \infty]$	półprosta domknięta: Nieotwarty, Domknięty, Niezwarty, Spójny
$p \in]0, \frac{9}{e^3}[$	suma półprostej i odcinka: Nieotwarty, Domknięty, Niezwarty, Niespójny
$p \in]-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0]$	odcinek domknięty: Nieotwarty, Domknięty, Zwarty, Spójny
$p = \frac{1}{\sqrt{e}}$	jeden punkt: Nieotwarty, Domknięty, Zwarty, Spójny
$p \in]-\infty, \frac{1}{\sqrt{e}}[$	zbiór pusty: Otwarty, Domknięty, Zwarty, Spójny.

♣

(22) Ponieważ metryka jest dziwna warto zacząć od zastanowienia się jak wyglądają kule otwarte w tej metryce.

$$K(m,\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \varepsilon\}.$$

Przy ustalonym m i ε znajdźmy oszacowania na n:

$$|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \varepsilon, \qquad \frac{|n-m|}{nm} < \varepsilon, \qquad |n-m| < mn\varepsilon$$

i dalej

$$\begin{array}{rcccl} -nm\varepsilon & < & m-n & < & nm\varepsilon \\ n - nm\varepsilon & < & m & < & n + nm\varepsilon \\ n(1-m\varepsilon) & < & m & < & n(1+m\varepsilon). \end{array}$$

Dalej lewą i prawą nierówność rozważamy oddzielnie. Zaczynamy od prawej:

$$m < n(1+m\varepsilon), \qquad n > \frac{m}{1+m\varepsilon}, \qquad n > \frac{1}{\varepsilon + \frac{1}{m}}.$$

Teraz lewa:

$$n(1-m\varepsilon) < m, \qquad n < \frac{m}{1-\varepsilon m} = \frac{-1}{\varepsilon - \frac{1}{m}} \text{ dla promieni } \varepsilon < \frac{1}{m}.$$

Dla promieni większych bądź równych $\frac{1}{m}$ nie ma górnej granicy n. Ostatecznie jeśli $f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon + \frac{1}{m}}$ i $g(\varepsilon) = \frac{-1}{\varepsilon - \frac{1}{m}}$

$$\begin{array}{ll} 0 < \varepsilon < \frac{1}{m} & K(m,\varepsilon) = \{n : f(\varepsilon) < n < g(\varepsilon)\} \\ \varepsilon = \frac{1}{m} & K(m,\varepsilon) = \{n : \frac{m}{2} < n\} \\ \varepsilon > \frac{1}{m} & K(m,\varepsilon) = \{n : f(\varepsilon) < n\}. \end{array}$$

W szczególności okazuje się, że dla każdego m istnieje taki promień ε, że kula o promieniu mniejszym zawiera tylko punkt m, co oznacza, że zbiór jednopunktowy jest otwarty. Rachunki pokazują, że taki promień jest równy $\frac{1}{m(m+1)}$. Dla każdego m istnieje także promień taki, że kula o tym promieniu zawiera cały zbiór $\mathbb{N}$. Topologia w której zbiory jednopunktowe są otwarte nazywa się dyskretna. Konsekwencją otwartości zbiorów jednopunktowych jest otwartość wszystkich zbiorów, bo wszystkie są sumami jednopunktowych. Ostatecznie wszystkie zbiory są otwarte a co za tym idzie wszystkie są domknięte. Jedynymi ciągami zbieżnymi w takiej topologii są ciągi od pewnego miejsca stałe.

Ma to wpływ na kryterium zwartości zbioru: zbiory zwarte są to zbiory mające skończoną liczbę elementów. Tylko w takim przypadku każdy ciąg zawiera podciąg od pewnego miejsca stały. Jedyne zbiory spójne są to zbiory jednopunktowe. Naturalna topologia indukowana z $\mathbb{R}$, a więc zadawana przez metrykę ρ jest taka sama.♣

(24) Zanim udowodnimy powyższe fakty zwróćmy uwagę na pożytek jaki z nich będziemy mieć. Otóż po ich udowodnieniu będzie łatwiej dowodzić niespójności lub spójności zbiorów. Będziemy szukać podzbiorów O_1, O_2 przestrzeni X takich, że $A \subset O_1 \cup O_2$ i nie będziemy musieli zajmować się tym czy O_1 i O_2 są otwarte jako podzbiory przestrzeni metrycznej w której się to wszystko dzieje. Nie będziemy musieli też pracować z topologią indukowaną – wszystkie własności topologiczne o których mowa są względem przestrzeni X. Zamiast topologii indukowanej rozważać będziemy warunek rozgraniczoności. Przejdźmy teraz do dowodu pierwszego faktu: **(1)** Niech A, O_1, O_2 będą jak w założeniach. Wtedy Oznaczamy $A_1 = A \cap O_1$, $A_2 = A \cap O_2$. Z zawierania $A \subset O_1 \cup O_2$ wynika $A = A_1 \cup A_2$. Skoro O_1 i O_2 są rozgraniczone, to w szczególności $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, czyli także $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pokażemy, że A_1 i A_2 są otwarte i domknięte w topologi indukowanej na A z przestrzeni X. Niech A_1^d oznacza domknięcie zbioru A_1 względem przestrzeni A. Weźmy punkt $a \in A_1^d$. Zauważmy, że skoro a jest elementem domknięcia w topologii indukowanej, to znaczy że jest elementem A. Należy więc do A_1 albo do A_2. Za chwile uzasadnimy, że nie może należeć do A_2. Punkt należy do domknięcia jeśli istnieje ciąg (x_n) punktów zbioru A_1 zbieżny do a. Ciąg zbieżny w topologii indukowanej jest też zbieżny w topologii X. Ciąg (x_n) ma elementy w zbiorze A_1, zatem także w zbiorze O_1, jego granica a należy więc do $\overline{O_1}$. Zbiór A_2 jest podzbiorem O_2 a $O_2 \cap \overline{O_1} = \emptyset$ zatem także $A_2 \cap \overline{O_1} = \emptyset$. Stąd wniosek, że $a \notin A_2$. Okazuje się więc, że $a \in A_1$, czyli $A_1^d = A_1$, innymi słowy zbiór A_1 jest domknięty jako podzbiór A w topologii indukowanej. To samo rozumowanie można przeprowadzić dla zbioru A_2. Ponieważ A_1 jest dopełnieniem A_2 i odwrotnie (w przestrzeni A), to oba są nie tylko domknięte, ale i otwarte. Otrzymaliśmy w ten sposób rozkład A na sumę otwarto-domkniętych rozłącznych podzbiorów. Jeśli A jest spójny, to któryś z tych podzbiorów musi być pusty. Jeśli $A_1 = \emptyset$ to $A \subset O_2$, jeśli $A_2 = \emptyset$ to $A \subset O_1$. **(2)** Dowód drugiego faktu został już w dużej mierze przeprowadzony w dowodzie faktu pierwszego. Żeby pokazać, że A jest niespójny, trzeba pokazać, że A_1, A_2 są otwarto-domknięte jako podzbiory A. Zostało to zrobione powyżej. ♣

(27) Oznaczmy przez W zbiór o którym mowa, tzn zbiór ciągów zbieżnych do zera. Zacznijmy od **domkniętości**: Ciąg (y_n) należy do domknięcia W jeśli jego odległość od W jest zero, to znaczy jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg x_n zbieżny do zera i taki, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| < \epsilon$. Weźmy ciąg y_n z domknięcia i sprawdźmy, czy jest on zbieżny do zera. Ustalamy $\varepsilon > 0$ i bierzemy ciąg (x_n) zbieżny do zera i oddalony od y_n nie więcej niż $\frac{\varepsilon}{2}$. Skoro $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ to znaczy w szczególności, że $\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Skorzystajmy z nierówności obowiązującej dla liczb rzeczywistych:

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \text{dla} \qquad a = x_n,\ b = y_n,$$

tzn

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ ||x_n| - |y_n|| \leq |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{czyli} \quad ||x_n| - |y_n|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalej mamy

$$-\frac{\varepsilon}{2} < |x_n| - |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x_n| - \frac{\varepsilon}{2} < |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_n|$$

Weźmy teraz n wystarczająco duże, żeby $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, wtedy ostatnią nierówność można zastąpić przez:

$$|y_n| < \varepsilon.$$

Pokazaliśmy zatem, że dla każdego $\varepsilon > 0$ dla wystarczająco dużych n wartość bezwzględna y_n jest mniejsza niż ε. Ciąg y_n jest więc zbieżny do zera i należy do W. W jest więc zbiorem domkniętym. Nie jest to zbiór **otwarty**, gdyż na przykład kula o środku w ciągu stałym o wyrazach równych zero i promieniu r zawiera ciąg stały o wyrazach równych $\frac{r}{2}$. Ciąg ten nie jest elementem W. Ponieważ

r może być dowolnie małe, żadna kula o środku w 0 nie jest całkowicie zawarta w W. Zbiór W jest **spójny**, gdyż jest łukowo-spójny. Jeśli (x_n) i (y_n) są ciągami zbieżnymi do zera to także ciąg $f_n(t) = tx_n + (1-t)y_n$ jest ciągiem zbieżnym do zera dla każdego t. Odwzorowanie $t \mapsto f_n(t)$ jest ciągłe, $1 \mapsto x_n$ i $0 \mapsto y_n$. Punkty (x_n), (y_n) można więc połączyć ciągłym obrazem odcinka. Zbiór W nie jest **zwarty**, gdyż dla ustalonego (x_n) zbieżnego do zera i różnego od ciągu stałego równego zero, ciąg ciągów x_n, $2x_n$, $3x_n$, ... nie zawiera podciągu zbieżnego: Odległość dwóch różnych wyrazów

$$d(kx_n, lx_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |kxn - lxn| = |k-l| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

♣

(31) Zadanie dotyczy pojęcia spójności. Niech $X_0 = A \cup B$ będzie przestrzenią metryczną z odległością i topologią indukowaną z X. Naszym zadaniem jest udowodnić, że X_0 jest przestrzenią spójną. Dowód przeprowadzimy metodą *ad absurdum*. Załóżmy więc, że przestrzeń X_0 nie jest spójna. Oznacza to, że jest sumą dwóch zbiorów O_1, O_2 otwartych i mających puste przecięcie:

$$X_0 = O_1 \cup O_2, \qquad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Zauważmy, że zbiory O_1, O_2 są jednocześnie domknięte (jako podzbiory X_0), gdyż O_1 jest dopełnieniem O_2 i odwrotnie.

A jest zbiorem spójnym i $A \subset O_1 \cup O_2$ Oznacza to, że $A \subset O_1$ lub $A \subset O_2$. Gdyby oba zbiory $A_1 = A \cap O_1$ i $A_2 = A \cap O_2$ były niepuste, przeczyłoby to spójności A. Mielibyśmy bowiem $A = A_1 \cup A_2$ gdzie A_1, A_2 są rozłączne jako pozdzbiory zbiorów rozłącznych i ponadto A_1, A_2 są otwarte w A z topologią indukowaną z X_0. (Z definicji topologia indukowana zadawana jest przez przecięcia zbiorów otwartych w większej przestrzeni z mniejszą przestrzenią). Podobnie rzecz się ma z B. Gdyby teraz $A \subset O_1$ i $B \subset O_2$, to A i B musiałyby być rozłączne jako podzbiory zbiorów rozłącznych. To oznacza, że A i B należą oba do O_1 lub oba do O_2. W pierwszym przypadku warunki:

$$X_0 = A \cup B \subset O_1,\ X_0 = O_1 \cup O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset \quad \text{dają} \quad O_2 = \emptyset.$$

W drugim przypadku otrzymamy $O_1 = \emptyset$. Okazuje się więc, że $A \cup B$ nie jest niespójny, gdyż takie założenie doprowadziło do sprzeczności.♣

(33) (a) $]0,1[\cup]1,\infty[$; (b) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$; (c) $\{\frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$♣

(36) (a) Wziąć y z domknięcia $f(A)$ i ciąg elementów $f(A)$ zbieżny do y. Ciąg ten jest obrazem pewnego ciągu elementów z A. A jest domkniętym podzbiorem przestrzeni zwartej, więc ... a to powoduje że ciąg elementów z A ... no i dalej chyba wiadomo. W punkcie (b) należy wiedzieć, że homeomorfizm to jest ciągła bijekcja, której odwrotność też jest ciągła. Przykład, że jeśli X nie jest zwarta, to wynikanie nie zachodzi może być taki: $X = [0,1] \cup]2,3]$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ dla $x \in [0,1]$ i $f(x) = x - 1$ dla $x \in]2,3]$. Wtedy $f(X) = [0,2]$ $f^{-1}(x) = x$ dla $x \in [0,1]$ i $f^{-1}(x) = x+1$ dla $x \in]1,2]$. Chodzi o to, że X jest w dwóch kawałkach i niezwarte.♣

(37) Zauważmy najpierw, że rzeczywiście każda izometria jest injekcją. Gdyby istniały dwa różne punkty $x \neq y$ takie, że $\varphi(x) = \varphi(y)$, to $d(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$ podczas gdy $d(x,y) \neq 0$ co prowadzi do sprzeczności. Zauważmy także, że izometria jest odwzorowaniem ciągłym w każdym punkcie. W definicji ciągłości wystarczy wziąć $\delta = \varepsilon$. Dowód surjektywności przeprowadzimy *ad absurdum*. Załóżmy zatem, że istnieje punkt x_0, który nie należy do obrazu φ. Zauważmy także, że $\delta = d(x_0, \mathrm{im}\varphi) > 0$, gdyż ze zwartości X wynika, że $\mathrm{im}\varphi$ jest zwarty, jako obraz zbioru zwartego przy odwzorowaniu ciągłym. Zbiór zwarty jest domknięty. Gdyby więc $d(x_0, \mathrm{im}\varphi) = 0$ oznaczałoby to, że $x_0 \in \overline{\mathrm{im}\varphi} = \mathrm{im}\varphi$. Element nie należący do obrazu musi być więc w niezerowej odległości od tego obrazu. Definiujemy teraz ciąg (x_n) wzorem $x_n = \varphi^n(x_0)$, czyli $x_1 = \varphi(x_0), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1})$. Obliczmy odległość między dwoma dowolnymi wyrazami tego ciągu. Niech $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$

$$d(x_n, x_m) = d(\varphi^n(x_0), \varphi^m(x_0)) = d(\varphi^{n-1}(x_0), \varphi^{m-1}(x_0)) = \cdots = d(\varphi^{n-m}(x_0), x_0) \geq \delta$$

gdyż oczywiście $\varphi^{n-m}(x_0) \in \mathrm{im}\varphi$. Ciąg ten nie może więc zawierać podciągu zbieżnego, skoro jego dwa dowolne wyrazy są odległe o co najmniej δ. Pozostaje to w sprzeczności ze zwartością przestrzeni X, w której każdy ciąg ma podciąg zbieżny. Okazuje się, że założenie o istnieniu punktu poza obrazem φ prowadzi do sprzeczności. Udowodniliśmy więc, że izometria φ jest surjekcją.♣

(38) Zacznijmy od sytuacji, kiedy przedział X na którym określona jest funkcja jest zwarty, tzn $X = [a, b]$. Załóżmy też dla ustalenia uwagi, że $f(a) < f(b)$. (Dowód dla przypadku $f(a) > f(b)$ jest bardzo podobny). Dla każdego $x \in]a, b[$ wartość $f(x)$ musi być zawarta między $f(a)$ i $f(b)$, tzn. $f(a) < f(x) < f(b)$. Gdyby tak nie było, to znaczy gdyby np. $f(x) > f(b)$, to wartość $f(b)$ byłaby przyjmowana raz gdzieś na odcinku $]a, x[$ (własność Darboux), a drugi raz w punkcie b, co przeczy injektywności. Podobnie gdyby $f(x) < f(a)$, to wartość $f(a)$ byłaby przyjmowana raz w punkcie a a drugi raz gdzieś na odcinku $]x, b[$. Jeśli teraz weźmiemy dwa dowolne punkty $x_1 < x_2$ z odcinka $]a, b[$. Otrzymamy $f(x_1) < f(x_2)$, gdyż przedstawione powyżej rozumowanie można zastosować do odcinka $]a, x_2[$ do którego należy x_1. Oznacza to, że f jest ściśle rosnąca. Jeśli zaczęlibyśmy od $f(a) > f(b)$ otrzymalibyśmy f ściśle malejącą.♣

Niech teraz X będzie dowolnym przedziałem niezwartym. Wybierzmy $[a, b] \subset X$ i załóżmy, że $f(a) < f(b)$. Tak jak poprzednio nie zmniejsza to ogólności dowodu. Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika, że f jest ściśle rosnąca na $[a, b]$. Weźmy teraz dowolny przedział $[a', b']$ zwarty zawierający $[a, b]$. Wtedy $f(a') < f(a)$. Gdyby bowiem było odwrotnie to mniejsza z liczb $\{f(a'), f(b)\}$, byłaby przyjmowana dwukrotnie: raz na odcinku $[a', a]$ i raz na $[a, b]$. Podobnie $f(b') > f(b)$. Mamy więc $f(a') < f(b')$, czyli f jest ściśle rosnąca na $[a', b']$. Weźmy teraz dowolne $x_1, x_2 \in X$ takie, że $x_1 < x_2$. Oznaczamy $a' = \min\{x_1, a\}$, $b' = \max\{x_2, b\}$. Wtedy $[a', b'] \supset [a, b]$ i $x_1, x_2 \in [a', b']$, czyli $f(x_1) < f(x_2)$. f jest więc ściśle rosnąca. Podobnie jak poprzednio przyjmując na początku założenie $f(a) > f(b)$ otrzymalibyśmy funkcję ściśle malejącą.♣

(39) Weźmy dwa punkty $a, b \in I$, $a < b$. Naszym zadaniem jest pokazać, że na odcinku $]a, b[$ wykres funkcji f leży pod prostą przechodzącą przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b)$. Prosta ta ma równanie

$$y_0(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}.$$

Niech x będzie dowolnym, ale od tego momentu ustalonym, punktem odcinka $]a, b[$. Niech c_0 oznacza wartość $y_0(x)$. Naszym zadaniem jest pokazać, że $c_0 \geq f(x)$. Weźmy teraz środek odcinka $]a, b[$, tzn. punkt $\frac{a+b}{2}$. Są trzy możliwości:

$$(1)\ \ x = \frac{a+b}{2}, \quad (2)\ \ x < \frac{a+b}{2}, \quad (3)\ \ x > \frac{a+b}{2}.$$

W pierwszym przypadku dowód jest zakończony (korzystamy z założenia). W drugim, oznaczamy

$$a_1 = a, \qquad b_1 = \frac{a+b}{2}$$

i konstruujemy prostą y_1 przechodzącą przez punkty $(a_1, f(a_1))$ i $(b_1, f(b_1))$. Oznaczamy przez c_1 wartość $y_1(x)$. Ponieważ punkt $(b_1, f(b_1))$ leży poniżej prostej y_1, to prosta y_1 na prawo od a leży poniżej y_0, oznacza to, że $c_1 \leq c_0$. W trzecim przypadku oznaczamy

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = b$$

i konstruujemy prostą y_1 przez punkty $(a_1, f(a_1), (b_1, f(b_2))$. Oznaczamy $c_1 = y_1(a_1)$. Łatwo pokazać, że, podobnie jak poprzednio $c_1 \leq c_0$. Wyznaczamy teraz środek odcinka $]a_1, b_1[$. Wiadomo, że x należy do tego odcinka, więc całą procedurę możemy powtórzyć konstruując punkty a_2, b_2 i wartość

$c_2 \leq c_1$. Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym i ograniczonym, ciąg (b_n) jest malejący i ograniczony, oba są więc zbieżne. Ponadto

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

co oznacza, że ciągi te są zbieżne do tej samej granicy. Skoro dla wszystkich n $a_n \leq x \leq b_n$ to oznacza, że $\lim a_n = \lim b_n = x$. Ciąg c_n ma tę własność, że dla wszystkich n c_n należy do odcinka o końcach $f(a_n)$, $f(b_n)$. Z ciągłości f wynika, że $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(x)$. Stąd wniosek, że $\lim c_n = f(x)$. Ciąg c_n jest więc malejącym ciągiem zbieżnym. Jego pierwszy wyraz jest zatem nie mniejszy niż jego granica: $c_0 \geq f(x)$, a to właśnie mieliśmy udowodnić.

Niech teraz $w(q)$ oznacza warunek wypukłości, tzn.

$$f(qa + (1-q)b) \leq qf(a) + (1-q)f(b).$$

Jest jasne, że jeśli funkcja spełnia $w(q)$ dla każdego $q \in [0,1]$ to spełnia $w(\frac{1}{2})$. Pokazaliśmy, że funkcja ciągła spełniająca $w(\frac{1}{2})$ spełnia $w(q)$ dla $q \in [0,1]$. Powstaje pytanie, czy założenie o ciągłości jest konieczne. Można udowodnić, że funkcja wypukła, czyli spełniająca $w(q)$ dla każdego $q \in [0,1]$ jest ciągła. Czy zatem ciągłość wynika też z $w(\frac{1}{2})$? Jeśli nie, to powinno się dać skonstruować funkcję nieciągłą, która spełnia $w(\frac{1}{2})$ ale nie jest wypukła. ♣

(40) Dowodzimy metodą *ad absurdum.* Załóżmy, że w zbiorze wartości funkcji f są przynajmniej dwie różne liczby. Oznaczmy je y_1 i y_2. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $y_1 < y_2$. Funkcja jest ciągła, zatem przyjmuje wszystkie wartości z odcinka $]y_1, y_2[$ (własność Darboux), innymi słowy $]y_1, y_2[\subset f(\mathbb{R})$. Z ciągłości funkcji f wynika, że $f^{-1}(]y_1, y_2[)$ jest zbiorem otwartym. $f(f^{-1}(]y_1, y_2[))$ jest więc zbiorem domkniętym. Ale skoro $]y_1, y_2[\subset f(\mathbb{R})$ to $f(f^{-1}(]y_1, y_2[)) =]y_1, y_2[$, który nie jest zbiorem domkniętym – sprzeczność.♣

(41) Przypomnieć sobie jak zachowują się własności topologiczne (otwartość, domkniętość, zwartość, spójność) względem odwzorowań ciągłych i sprawdzić czy to się da użyć do odpowiedzi na któreś z pytań. Wybrać dwa punkty na okręgu. Jeśli wartość funkcji w tych punktach jest taka sama, to funkcja jest nieinjektywna. Jeśli wartości są różne, to wykazać, że liczba pomiędzy wartościami w tych punktach musi być przyjmowana dwa razy: raz na każdym z dwóch łuków łączących dwa wybrane punkty. Tu można wykorzystać własność Darboux.♣