

FAQ ANALIZA R[©] – ZADANIA

Zbiory

Zadanie 1. Opisać zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ jeśli

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x < 0, \};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 4 \geq 0\}$$

Zadanie 2. Niech A , B , C , D będą podzbiorami przestrzeni X . Udowodnić, że $A \setminus D$ zawiera się w $(A \setminus D) \cap (D \setminus B)$.

Zadanie 3. Uprościć warunki

- (a) $(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) = B$,
- (b) $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$,
- (c) $[(A \cap B) \cup C] \setminus A = (A \cap B) \setminus C$.

Zadanie 4. Wyrazić poprzez teoriomnogościowe operacje na zbiorach $A, B, C \subset X$ następujące zbiory

- (a) $\{x \in X : x \in A \Rightarrow x \in B\}$,
- (b) $\{x \in X : x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$,
- (c) $\{x \in X : x \in A \text{ albo } x \in B\}$,
- (d) $\{x \in X : x \in A \Rightarrow (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\}$.

Zadanie 5. Wykazać tożsamości

- (a) $A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$,
- (b) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup [(A \cap C) \setminus D]$,
- (c) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup A_n$, dla $n \geq 2$,
- (d) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = [A_1 \setminus (A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)] \cup \dots \cup [A_{n-1} \setminus A_n] \cup A_n$,
- (e) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$.

Zadanie 6. Wykazać, że

- (a) $\bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i) \subset (\bigcup_{i \in I} A_i) \setminus (\bigcap_{i \in I} B_i)$, lecz równość nie musi zachodzić.
- (b) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subset (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$. Podać przykład, gdy zawieranie nie jest równością.

Zadanie 7. Niech $k, l, n \in \mathbb{N}$ takie, że $n + 1 = k + 1$ oraz $A_1, \dots, A_n$ dane zbiory. Wykazać, że $L = P$ jeśli

$$L = \bigcup_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

$$P = \bigcap_{j_1 < j_2 < \dots < j_l} (A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_l}).$$

Zadanie 8. Wykazać, że $A \div B \subset (A \div C) \cup (C \div B)$ oraz, że następujące zdania są równoważne:

- (a) „składniki sumy po prawej stronie są rozłączne”
- (b) „inkluzja staje się równością”,
- (c) $A \cap B \subset C \subset A$.

Zadanie 9. Dla danego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \dots$ określmy

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Wykazać, że zawsze $\bigcap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_n A_n$. Przekonać się o tym dla

$$A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{n+1}, \frac{4n-15}{2n-7} \right].$$

Zadanie 10. Wykazać, że dla dowolnych rodzin zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzą wzory

- (a) $\liminf (A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$,
- (b) $\liminf (A_n \cup B_n) \supset \liminf A_n \cup \liminf B_n$,
- (c) $\limsup (A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$,
- (d) $\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

Zadanie 11. Opisać i naszkicować na płaszczyźnie zbiór

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 3nx + 4ny \leq 25\}$$

Zadanie 12. Znaleźć zbiór

$$Y = \bigcup_{t \in [0, +\infty)} A_t, \quad \text{gdzie} \quad A_t = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2t(2x - t)\}.$$

Zadanie 13. Naszkicować zbiory

- (a) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq n(x_1 - x_2)\}$
- (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + 2(x_2)^2 - 3nx_1 + 4nx_2 \leq 0\}$,
- (c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq nx_1\}$,

Zadanie 14. Znaleźć zbiory $\bigcup_{t \in [0, 1]} A_t$ i $\bigcap_{t \in [0, 1]} A_t$ jeśli $A_t = [t, 2t+1] \times [-t, t+1]$.

Zadanie 15 (zadanie Lewisa Carolla). W pewnej bitwie co najmniej 80% walczących straciło rękę, co najmniej 85% walczących straciło nogę, co najmniej 70% straciło oko, co najmniej 75% straciło ucho. Oszacować liczbę tych uczestników bitwy, którzy odnieśli wszystkie cztery obrażenia.

Zadanie 16 (Ilustracja do twierdzenia Cantora-Bernsteina-Schroedera). : Niech

$$X = Y = \{(x_n)_{n=0}^\infty, \quad x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Niech także

$$\varphi : X \rightarrow Y, \quad \phi(x_n) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Przyjmując $\psi = \varphi$ skonstruować bijekcję jak w dowodzie twierdzenia CBS.

Relacje, odwzorowania

Zadanie 17. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1, 0, 1\}$ Określmy funkcję $d_{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$d_{\mathcal{R}}(x, y) := \begin{cases} \|x - y\| & \text{gdy } (\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y) \in \mathcal{R} \\ \|x\| + \|y\| & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Wykazać, że:

- (a) $(d_{\mathcal{R}}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y) \Leftrightarrow \mathcal{R}$ jest zwrotna,
- (b) $(d_{\mathcal{R}} \text{ jest symetryczna, tzn. } d_{\mathcal{R}}(x, y) = d_{\mathcal{R}}(y, x)) \Leftrightarrow \mathcal{R} \text{ jest symetryczna,}$
- (c) $d_{\mathcal{R}}$ spełnia nierówność trójkąta $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ jest przechodnia.

Zadanie 18. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania, opisać jego zbiór wartości i poziomice:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & f(t) &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \\ g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &= \frac{x}{x^2+y^2}, \\ h : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}, & h(k) &= 2k^2 - 3k + 1. \end{aligned}$$

Zadanie 19. Odwzorowanie $f : X \rightarrow X$ spełnia warunek

$$\forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = x.$$

Udowodnić, że odwzorowanie f jest bijekcją. Symbol f^n oznacza tu n -krotne złożenie odwzorowania f ze sobą, tzn. $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\times n}$

Zadanie 20. Podać przykład bijekcji między zbiorami X i Y jeśli

- (a) $X = [0, 1[, \quad Y = [0, 1],$
- (b) $X =]0, 1[, \quad Y = [-2, 2] \setminus \{-1, 2\},$
- (c) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad Y = \mathbb{N}.$

Zadanie 21. Znaleźć najmniejszą relację równoważności w $\{a, b, c, d\}$ zawierającą (a, c) oraz (a, d) .

Zadanie 22. W $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(n, m) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. W przestrzeni $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ klas abstrakcji wprowadzić działania dodawania i mnożenia tak, aby zbiór ten był izomorficzny z $\mathbb{Z}$.

Zadanie 23. Podobnie skonstruować można $\mathbb{Q}$, wprowadzając stosowną relację w $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Zdefiniować tę relację.

Zadanie 24. W zbiorze $\mathbb{Q}$ definiujemy relację

$$R = \{(x, y) : \exists n \in \mathbb{N} \quad 10^n(x - y) \in \mathbb{Z}\}.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Opisać klasy równoważności.

Zadanie 25. Wykazać, że odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$$

jest bijekcją. Wyliczyć f^{-1} .

Indukcja

Zasada indukcji matematycznej Zasada indukcji wyraża jedną z podstawowych własności zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Jest ona bądź aksjomatem, bądź twierdzeniem, zależnie od tego jak definiowany jest zbiór $\mathbb{N}$. A oto podstawowe sformułowanie zasady indukcji (ZI): *Jeżeli T jest podzbiorem $\mathbb{N}$ spełniającym warunki (1) $1 \in T$, (2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in T \Rightarrow n+1 \in T$, to T jest całym zbiorem liczb naturalnych, tzn $T = \mathbb{N}$.* ZI oznacza, że każdą liczbę naturalną można osiągnąć wychodząc od 1 i poruszając się odpowiednio długo „w prawo” z krokiem równym 1. Dokładniej: $\mathbb{N}$ jest najmniejszym zbiorem liczb, który zawiera 1 i wraz z każdym elementem n zawiera jego następnik $n+1$.

Zadanie 26. Udowodnić, że

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 27. Niech (x_n) będzie ciągiem określonym następującymi warunkami:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{5}{4 - x_n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wykazać, że

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_{2n} = \frac{5 - x_n^2}{4 - 2x_n}.$$

Rozwiązanie Indukcja: Należy sprawdzić, że $x_{2n} = g(x_n) \Rightarrow x_{2n+2} = g(x_{n+1})$; jeśli oznaczymy $f(x) := \frac{5}{4-x}$, $g(x) := \frac{5-x^2}{4-2x}$, to ostatnia równość oznacza $f \circ f(x_{2n}) = g \circ f(x_n)$, wystarczy więc sprawdzić równość $f \circ f \circ g(x) = g \circ f(x)$. Łatwy rachunek pokazuje, że oba te wyrażenia są równe $\frac{5x^2-40x+55}{4x^2-22x+24}$, gdyż $f(x) = \frac{20-5x}{11-4x}$. *Uwaga.* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{20}{11}$, $x_4 = \frac{55}{24}$, $x_5 = \frac{120}{41}$, $x_6 = \frac{205}{44}$; ciąg (x_n) jest rozbieżny!



Zadanie 28. Dowieść, że jeśli $(x_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem, określonym rekurencyjnie:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 + x_n} \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

to $x_{m+n} = \frac{2+x_m x_n}{x_m + x_n}$ dla każdej pary $m, n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie: Ustalmy $m \in \mathbb{N}$ i zastosujmy indukcję względem $n \in \mathbb{N}$: Dla $n = 1$ wzór

$$W_n : \quad x_{m+n} = \frac{2 + x_m x_n}{x_m + x_n}$$

ma postać

$$x_{m+1} = \frac{2 + x_m}{1 + x_m},$$

więc jest prawdziwy zgodnie ze wzorem rekurencyjnym. Wykażemy implikację $W_n \Rightarrow W_{n+1}$:

$$x_{m+n+1} = \frac{2 + x_{m+n}}{1 + x_{m+n}} = \frac{2 + \frac{2+x_m x_n}{x_m + x_n}}{1 + \frac{2+x_m x_n}{x_m + x_n}} = \frac{2x_m + 2x_n + 2 + x_m x_n}{x_m + x_n + 2 + x_m x_n}$$

wskutek W_n , więc

$$\frac{2 + x_m x_{n+1}}{x_m + x_{n+1}} = \frac{2 + x_m \frac{2+x_n}{1+x_n}}{x_m + \frac{2+x_n}{1+x_n}} = \frac{2(1+x_n) + x_m(2+x_n)}{x_m(1+x_n) + (2+x_n)} = x_{m+n+1}.$$



Zadanie 29. Dowieść, że jeśli $(x_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem, określonym rekurencyjnie:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 + x_n} \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

to $x_{2n} = \frac{2+x_n^2}{2x_n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie: Indukcja: Dla $n = 1$ wzór $x_2 = \frac{2+x_1^2}{2x_1}$ jest prawdziwy, bo $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$; jeśli zaś jest prawdziwy dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)} = x_{2n+2} &= \frac{2 + x_{2n+1}}{1 + x_{2n+1}} = \frac{2 + \frac{2+x_{2n}}{1+x_{2n}}}{1 + \frac{2+x_{2n}}{1+x_{2n}}} = \frac{4 + 3x_{2n}}{3 + 2x_{2n}} \\ &= \frac{4 + \frac{3(2+x_n^2)}{2x_n}}{3 + \frac{2(2+x_n^2)}{2x_n}} = \frac{3x_n^2 + 8x_n + 6}{2x_n^2 + 6x_n + 4}, \end{aligned}$$

z drugiej zaś strony

$$\frac{2+x_{n+1}^2}{2x_{n+1}} = \frac{2+\left(\frac{2+x_n}{1+x_n}\right)^2}{2\left(\frac{2+x_n}{1+x_n}\right)} = \frac{2(1+x_n)^2+(2+x_n)^2}{2(1+x_n)(2+x_n)} = \frac{3x_n^2+8x_n+6}{2x_n^2+6x_n+4},$$

czyli $x_{2(n+1)} = \frac{2+x_{n+1}^2}{2x_{n+1}} \cdot \clubsuit$

Zadanie 30. Dowieść, że jeśli $(x_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem, określonym rekurencyjnie:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

to $2x_{2n} = \frac{1+x_n^2}{1+x_n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie: Sprawdzenie kroku indukcyjnego: Jeśli $2x_{2n} = \frac{1+x_n^2}{1+x_n}$, to

$$2x_{2n+2} = \frac{2}{2+x_{2n+1}} = \frac{2}{2+\frac{1}{2+x_{2n}}} = \frac{4+2x_{2n}}{5+2x_{2n}} = \frac{4(1+x_n)+1+x_n^2}{5(1+x_n)+1+x_n^2},$$

z drugiej zaś strony

$$\frac{1+x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}} = \frac{1+\frac{1}{(2+x_n)^2}}{1+\frac{1}{2+x_n}} = \frac{(2+x_n)^2+1}{(2+x_n)(3+x_n)},$$

skąd widać, że $2x_{2(n+1)} = \frac{1+x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}}$.

Uwaga: Można dowieść (np. indukcyjnie), że $x_n = \frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a^n-b^n}$, gdzie $a := 1 + \sqrt{2}$, $b := 1 - \sqrt{2}$; wykorzystanie tego wzoru do dowodu tezy zadania jest możliwe, ale dość uciążliwe. $\clubsuit$

Zadanie 31. Na płaszczyźnie leży n kół o jednakowych promieniach i rozłącznych wnętrzach. Wykazać, że można tak pokolorować te koła 4 barwami, by żadna para kół stycznych nie była w jednym kolorze.

Liczby rzeczywiste.

Zadanie 32. Zbadać ograniczoność i ewentualnie wyznaczyć kresy zbiorów

$$X = \left\{ \frac{m}{(n+m)n}, \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad Y = \left\{ \sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}), \quad n \in \mathbb{N} \right\},$$

gdzie $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Zadanie 33. Udowodnić nierówność Bernoulliego

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Zadanie 34. Dla $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ definiujemy

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Udowodnić nierówności

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq H(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Zadanie 35 (Nierówność Jensena). Funkcję $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wypukłą na I , jeśli dla dowolnych $a, b \in I$ oraz $q \in [0, 1]$ zachodzi

$$f(qa + (1 - q)b) \leq qf(a) + (1 - q)f(b).$$

Udowodnić, że jeśli f jest wypukła, to dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ oraz $q_1, q_2, \dots, q_n \in [0, 1]$ takich, że $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ zachodzi nierówność

$$f(q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n) \leq q_1 f(a_1) + q_2 f(a_2) + \dots + q_n f(a_n).$$

Zadanie 36. Dowieść, że liczby *Fibonacciego*, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, mogą być otrzymane ze wzorów

$$F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}.$$

Zwróćmy uwagę, że zgodnie z definicją

$$\binom{m}{k} := \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{Z}.$$

Składniki $\binom{n-k}{k}$ znikają dla $\frac{n}{2} < k \leq n$

Rozwiązanie: Widać, że dla $n = 0$ i $n = 1$ wzory są prawdziwe. Jeśli $n \geq 1$ oraz $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$ i $F_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}$, to przemianowując k na $k-1$ mamy $F_{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n-k}{k-1}$, więc z elementarnej własności $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ dla $m = n-k$ dostajemy $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \binom{n-0}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1-k}{k} =: R$. Ponieważ $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ oraz $\binom{n+1-k}{k} = 0$ dla $k = n+1$, więc możemy R zapisać jako $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$. ♣

Zadanie 37. Załóżmy, że dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, $a^3 + a$ i $a^2 + a$ są wymierne. Udowodnić, że a jest wymierne.