# Funkcje hiperboliczne

Mateusz Goślinowski

12 grudnia 2016

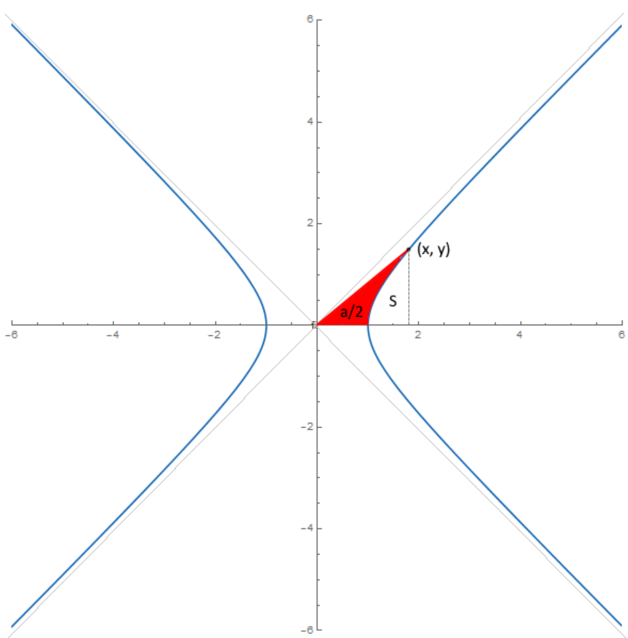
## 1 Geometria hiperboli

Zastanówmy się nad następującym faktem. Zauważmy, jak podobne są równania okręgu jednostkowego i hiperboli jednostkowej:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{Okrąg}$$
$$x^2 - y^2 = 1 \tag{Hiperbola}$$

Można więc spytać, czy analogicznie do funkcji trygonometrycznych na okręgu, istnieją funkcje hiperboliczne na hiperboli? Okazuje się, że tak.

Narysujmy hiperbolę jednostkową i oznaczmy na jej prawej gałęzi punkt o dodatnich współrzędnych $(x, y)$:




Hiperbola o równaniu $x^2 - y^2 = 1$

Oznaczyliśmy pole czerwonej figury przez $\frac{a}{2}$. Wyznaczmy ją w zależności od $x$. Z addytywności pól mamy

$$\frac{1}{2}xy = \frac{a}{2} + S.$$

Ale punkt $(x, y)$ leży na hiperboli; spełnia więc jej równanie, w szczególności $y = \sqrt{x^2 - 1}$, stąd

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} = \frac{a}{2} + S,$$

gdzie $S$ jest polem pod wykresem funkcji $\sqrt{t^2 - 1}$ od 1 do $x$. Stąd otrzymujemy

$$a = x\sqrt{x^2-1} - 2\int_1^x \sqrt{t^2-1}\, dt.$$

Całkując otrzymaną funkcję w odpowiednich granicach, dochodzimy do wzoru na pole w zależności od $x$:

$$a = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

My chcemy z tego równania wyznaczyć $x$. Zauważmy więc, że

$$e^a + e^{-a} = (x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + (x^2-1) + 1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2x$$

Skąd ostatecznie

$$x = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

Postępując podobnie z $y$, tj. wyznaczając $x$ od $y$ i przerachowując wszystkie wzory, otrzymalibyśmy również

$$a = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$y = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

Otrzymaliśmy zatem *parametryzację hiperboli* (a przynajmniej jej prawej gałęzi), w zależności od pola przez nią zakreślanego! Pamiętamy że parametryzacja okręgu odbywała się poprzez $(\cos t, \sin t)$). Niech więc przez analogię hiperbola będzie parametryzowana przez nowo nazwane funkcje $(\cosh t, \sinh t)$, gdzie

$$\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2} \tag{1.1}$$
$$\sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2} \tag{1.2}$$

Oraz odpowiednio

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

Oczywiście zdefiniowaliśmy już ich funkcje odwrotne, zwane *area hiperbolicznymi*:

$$\operatorname{arcosh} x := \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\operatorname{arsinh} y := \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Analogia jest więc pełna. Tak jak funkcje trygonometryczne parametryzują okrąg, a cyklometryczne zwracają zadany kąt, tak te hiperboliczne parametryzują hiperbolę, a funkcje area - zwracają pole. Możemy jednak sięgnąć głębiej zauważając, że w przypadku okręgu zakreślane przez kąt pole jest równe połowie kąta ($a = \frac{\varphi}{2}$). Wygląda znajomo?...

Przyjrzyjmy się własnościom tych funkcji. Czy są one podobne do funkcji trygonometrycznych? Z definicji mamy oczywiście wzór zwany **jedynką hiperboliczną**:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.3}$$

Oraz

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{2e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{x-y} - 2e^{-x-y}}{4} = \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}}{4} = \\
&= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \\
&= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y
\end{aligned}$$

Podobnie udowadniamy następujące tożsamości hiperboliczne:

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}
\end{aligned}$$

Podobnie zachowują się nawet wzory na sumy i różnice sinusów i cosinusów hiperbolicznych:

$$\begin{aligned}
\sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\
\sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\
\cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\
\cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Można zadać pytanie, czy pochodne funkcji hiperbolicznych dają również funkcje hiperboliczne? Okazuje się, że tak. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \frac{(e^{x})' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
(\cosh x)' &= \frac{(e^{x})' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x \\
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x
\end{aligned}$$

Stąd różniczkując funkcję hiperboliczną sinus lub cosinus dwukrotnie, otrzymujemy tę samą funkcję. Stąd na przykład widać, że rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego $y'' = n^2 y$ jest

$$y(x) = a \cdot \sinh(nx + \alpha) + b \cdot \cosh(nx + \beta)$$

Pochodne funkcji area:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arsinh} x)' &= \frac{1}{\sinh' y} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
(\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\cosh' y} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \text{dla } x > 1 \\
(\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{\tanh' y} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2} && \text{dla } |x| < 1 \\
(\operatorname{arcoth} x)' &= \frac{1}{\coth' y} = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2} && \text{dla } |x| > 1
\end{aligned}
$$

Oraz rozwinięcia funkcji w szereg Taylora:

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots
\end{aligned}
$$

Wszystkie te i wiele innych tożsamości można wyprowadzić z tożsamości trygonometrycznych; wystarczy zauważyć, że

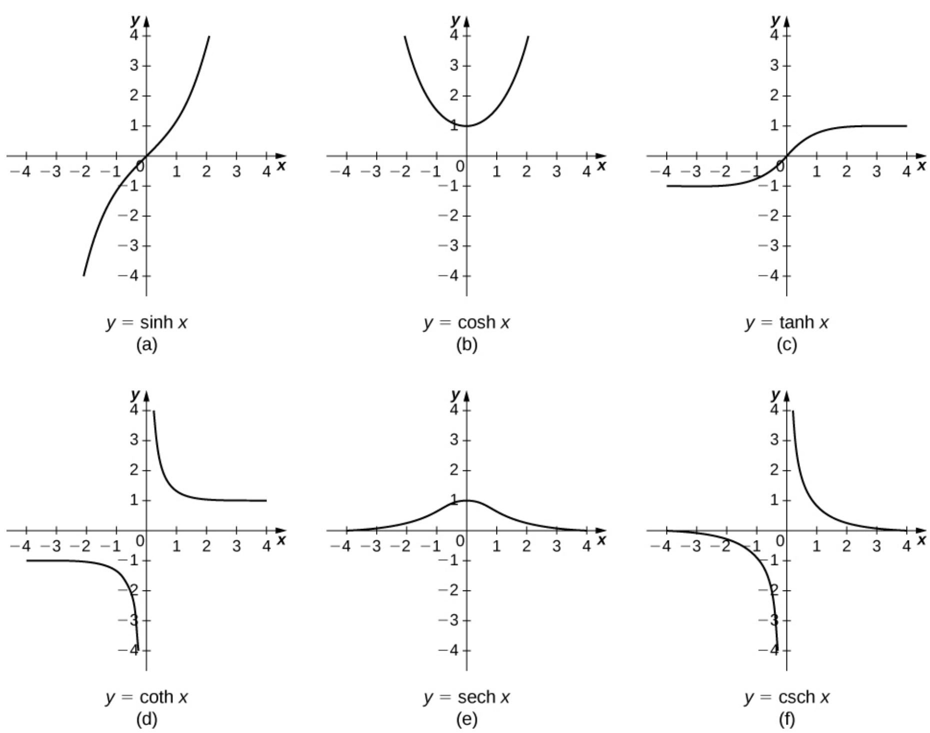
$$
\begin{aligned}
\sinh x &= -i \sin(ix) \\
\cosh x &= \cos(ix)
\end{aligned}
$$

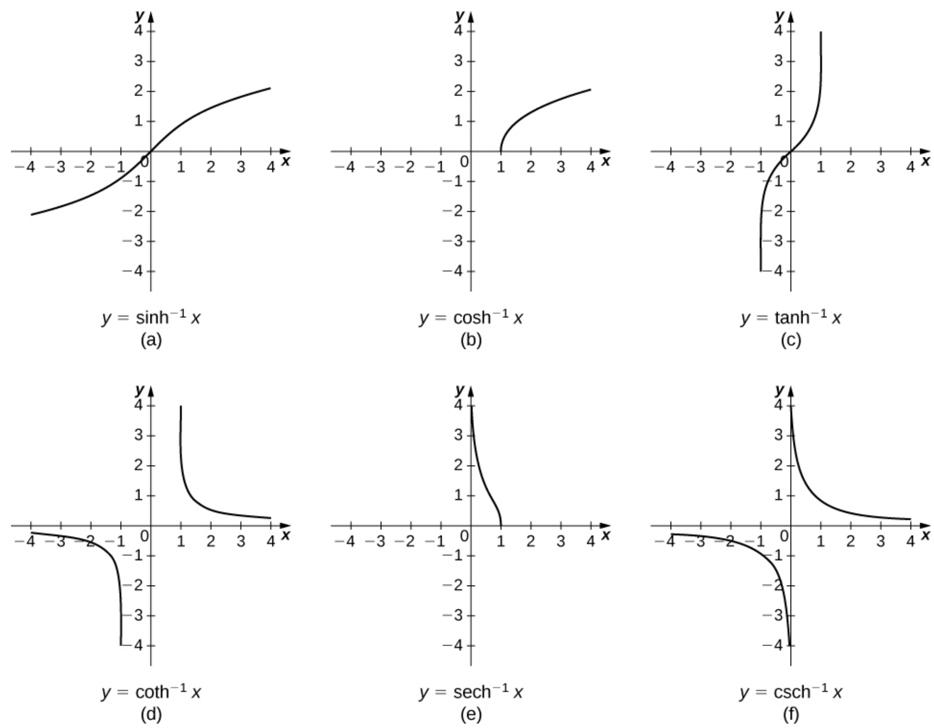
Hiperbolę można więc traktować jako pewnego rodzaju okrąg o urojonym promieniu:

$$x^2 - y^2 = 1 = x^2 + (iy)^2$$

Rzeczywiście, mnożenie przez $i$ oznacza jedynie obrót na płaszczyźnie zespolonej. Na *zespolonej płaszczyźnie rzutowej* okrąg jednostkowy jest nieodróżnialny od jednostkowej hiperboli.

Na koniec parę wykresów:






Wykresy funkcji hiperbolicznych i area