FUNKCJE WYPUKŁE

definicja $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest **wypukła** na $]a,b[$, jeśli dla każdego $x, x' \in]a,b[$ i $\theta \in [0,1]$ zachodzi nierówność:

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \le \theta f(x) + (1-\theta) f(x')$$

Twierdzenie 1

f wypukła na $]a,b[$ $\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{dla dowolnego skończonego} \\ \text{podzbioru } \{x_1, \dots, x_n\} \subset]a,b[\\ \text{i dowolnej rodziny liczb} \\ 0 \le \theta_i \le 1, \quad i = 1, \dots, n \text{ takiej,} \\ \text{że } \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1 \text{ zachodzi} \\ \boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \theta_i f(x_i)} \end{array} \right\}$

dowód

$\Longrightarrow$

Nierówność zachodzi dla $n=2$ z definicji funkcji wypukłej. Dla $n > 2$:

Niech $y \equiv \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1-\theta_n} x_i$, wtedy

$y \in]a,b[$!?

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i\right) = f\left((1-\theta_n) y + \theta_n x_n\right) \le (1-\theta_n) y + \theta_n f(x_n) \le$$

$$\le (1-\theta_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1-\theta_n} f(x_i) + \theta_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i f(x_i)$$

Twierdzenie 2

f wypukła na $]a,b[$ $\iff$ dla dowolnych $x_1 < x_2 < x_3 \in]a,b[$ zachodzi:

a) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$

b) $\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

c) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$

dowód

niech $\theta = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$

$$1-\theta = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$$

$$x_2 = \theta x_1 + (1-\theta)x_3$$

dla funkcji wypukłej mamy:

$$0 \le \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_3) - f(x_2) = \theta(f(x_1) - f(x_2)) +$$
$$+ (1-\theta)(f(x_3)-f(x_2)) =$$
$$= \frac{x_3-x_2}{\underbrace{x_3-x_1}_{>0}}(f(x_1)-f(x_2)) + \frac{x_2-x_1}{\underbrace{x_3-x_1}_{>0}}(f(x_3)-f(x_2))$$

co jest równoważne nierówności a)

ponadto zachodzi

$$0 \le \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_3) - f(x_2) =$$
$$= \theta\big(f(x_1) - f(x_3)\big) + \big(f(x_3) - f(x_2)\big) =$$
$$= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_1) - f(x_3)\big) + \big(f(x_3) - f(x_2)\big)$$

stąd mamy b)

dla c) zapisujemy

$$0 \le \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_3) - f(x_2) =$$
$$= (1-\theta)\big(f(x_3) - f(x_1)\big) + f(x_1) - f(x_2)$$

i przekształcamy analogicznie do poprzednich nierówności.

Z twierdzenia 2 płyną następujące wnioski:

A) istnieją granice: $(x \in]a,b[)$

$$f'_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

B) funkcja wypukła na odcinku <u>otwartym</u> jest ciągła

Twierdzenie 3

3) Funkcja różniczkowalna na $]a, b[$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

a) jej pochodna jest funkcją niemalejącą

b) jeśli jest dwukrotnie różniczkowalna to jej druga pochodna jest nieujemna

dowód ponieważ dla każdego $x_1 < x_2 < x_3 \in]a, b[$ zachodzi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

czyli

$$\frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$$\lim_{x_3 \to x_1} \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1} \geq 0$$

więc funkcja jest rosnąca. To oznacza, że jeśli ma ona drugą pochodną, jest ona nieujemna.