

Analiza IR 2016/2017
Pierwsze kolokwium przykładowe

Zadanie 1. Opisać i naszkicować na płaszczyźnie zbiór

$$Y = \bigcup_{t \in [0, +\infty)} A_t, \quad \text{gdzie } A_t = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2t(2x - t)\}.$$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granice następujących ciągów

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}, \quad b_n = n \log \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$$
$$c_n := \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right), \quad d_n = n \left[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}} \right].$$

Zadanie 3. W zależności od $x_0 \neq \frac{2}{3}$ zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę ciągu zadanego w sposób rekurencyjny

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{3x_n - 2}.$$

Zadanie 4. Udowodnić, że (a) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony, (b) jeśli $(x_n), (y_n)$ są ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d) to ciąg liczbowy $d_n = d(x_n, y_n)$ jest zbieżny.