Analiza IR 2016/2017
Rozwiązania zadań z pierwszego kolokwium przykładowego

Zadanie 1. Opisać i naszkicować na płaszczyźnie zbiór

$$Y = \bigcup_{t\in[0,+\infty)} A_t, \quad \text{gdzie} \quad A_t = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 2t(2x-t)\right\}.$$

Rozwiązanie: Nietrudno stwierdzić, przekształcając nierówność

$$x^2+y^2 \le 2t(2x-t)$$

do postaci

$$(x-2t)^2+y^2 \le 2t^2,$$

że zbiór A_t jest domkniętym kołem o środku w punkcie $(2t,0)$ i promieniu $\sqrt{2}t$. Jedynie zbiór A_0 składa się z jednego punktu $(0,0)$. Zbiór Y alternatywnie opisać można następująco

$$Y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \exists t \in [0,\infty[: \ x^2+y^2 \le 2t(2x-t)\right\}.$$

Zmieniamy zatem punkt widzenia na nierówność definiującą A_t – teraz patrzymy na nią jak na nierówność kwadratową względem t z parametrami x, y. Przekształcamy tę nierówność do postaci

$$2t^2 - 4xt + (x^2-y^2) \le 0.$$

Współczynnik przy najwyższej potędze t jest dodatni, zatem warunkiem istnienie rozwiązań nierówności jest istnienie rzeczywistych pierwiastków wielomianu kwadratowego po lewej stronie. Wyróżnik tego wielomianu musi być więc nieujemny:

$$\Delta(x,y) = 16x^2 - 8(x^2+y^2) = 8(x^2-y^2) \ge 0$$

Warunkiem nieujemności $\Delta(x,y)$ jest $|x| \ge |y|$. Dodatkowo istnieć mają rozwiązania nieujemne, tzn większy z pierwiastków wielomianu musi być nieujemny. Pierwiastki mają postać

$$t_1 = x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2-y^2}, \qquad t_2 = x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2-y^2}.$$

Większy z pierwiastów to t_2. Jest on nieujemny gdy x jest nieujemny. Ostatecznie zbiór Y można opisać warunkiem

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > |y|\}.$$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granice następujących ciągów

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}, \qquad b_n = n \log\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$
$$c_n := \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right), \quad d_n = n\left[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}\right].$$

Rozwiązanie: Ciąg a_n spróbować można zbadać korzystając z twierdzenia Cauchy'ego, które mówi, że dla $x_n > 0$ jeśli istnieje granica $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, to istnieje także granica $\sqrt[n]{x_n}$ i obie granice są równe. Oznaczamy zatem $x_n = \frac{(2n-1)!!}{n^n}$ i liczymy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)!!\, n^n}{(n+1)^{n+1}(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} =$$
$$= \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2n+1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{e}.$$

Ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}.$$

Korzystając z własności logarytmu, ciąg b_n przekształcimy do postaci

$$b_n = \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n.$$

Logarytm jest funkcją ciągłą, zatem badać możemy jedynie wyraz pod logarytmem:

$$y_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n = \left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^n \longrightarrow e^2.$$

Ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \log y_n = \log(\lim_{n\to\infty} y_n) = \log e^2 = 2.$$

Badając ciąg c_n zajmiemy się najpierw wyrażeniem pod funkcją sin:

$$\pi\sqrt{n^2+1} = \pi\sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n = \pi\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} + \pi n = \pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \pi n.$$

Otrzymaną postać wstawiamy do wyrażenia na c_n

$$c_n = \sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \pi n\right) =$$
$$= \sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\cos\pi n + \cos\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\sin(\pi n) =$$
$$= (-1)^n \sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \longrightarrow 0.$$

Oznaczmy $\alpha_n = (n+1)^{\frac{1}{100}}$, $\beta_n = n^{\frac{1}{100}}$. Wtedy $d_n = n(\alpha_n - \beta_n)$. Prowadzimy standardowe rachunki

$$d_n = n(\alpha_n - \beta_n) = n\frac{\alpha_n^{100} - \beta_n^{100}}{\alpha_n^{99} + \alpha_n^{98}\beta_n + \cdots \beta_n^{99}} = n\frac{n+1-n}{\alpha_n^{99} + \alpha_n^{98}\beta_n + \cdots \beta_n^{99}} =$$
$$\frac{n}{\alpha_n^{99} + \alpha_n^{98}\beta_n + \cdots \beta_n^{99}} \longrightarrow \infty.$$

Zadanie 3. W zależności od $x_0 \neq \frac{2}{3}$ zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę ciągu zadanego w sposób rekurencyjny

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{3x_n - 2}.$$

Rozwiązanie: Niech f będzie funkcją $f(t) = \frac{2t-1}{3t-2}$. Wtedy $x_{n+1} = f(x_n)$. Wzór określający f zapisać można także w postaci

$$f(t) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{9}}{(x - \frac{2}{3})}.$$

Funkcja f jest homografią określoną na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, której zbiór wartości jest równy dziedzinie. Jeśli (x_n) jest zbieżny, to jego granica g jest punktem stałym funkcji f, tzn spełnia $f(g) = g$. Rozwiązując odpowiednie równanie kwadratowe łatwo stwierdzić, że f ma dwa punkty stałe $g_1 = \frac{1}{3}$ i $g_2 = 1$. Jeśli $x_0 = \frac{1}{3}$ lub $x_0 = 1$ ciąg (x_n) jest stały i, oczywiście, zbieżny do granicy odpowiednio g_1 lub g_2.

Zauważmy ponadto, że $f \circ f$ jest identycznością, tzn $f(f(t)) = t$. Oznacza to, że dla $x_0 \notin \{g_1, g_2, \frac{2}{3}\}$ zachodzi $x_{n+2} = x_n$, tzn. ciąg przyjmuje naprzemiennie dwie wartości, jest więc rozbieżny.

Zadanie 4. Udowodnić, że (a) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony, (b) jeśli (x_n), (y_n) są ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d) to ciąg liczbowy $d_n = d(x_n, y_n)$ jest zbieżny.

Rozwiązanie: (a) Niech (x_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej. Przypomnijmy warunek Cauchy'ego:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n, m > N \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy stosowne N. Z warunku Cauchy'ego wynika, że dla $m > N$ $d(x_{N+1}, x_m) < \varepsilon$. Niech $R = \max\{d(x_{N+1}, x_1), d(x_{N+1}, x_2), \ldots, d(x_{N+1}, x_N), \varepsilon\}$. R jest skończoną liczbą dodatnią. Wszystkie wyrazy ciągu należą do kuli $K(x_{N+1}, R)$, ciąg jest więc ograniczony. (b) Wykażemy, że ciąg liczbowy (d_n) jest ciągiem Cauchy'ego, co w zbiorze liczb rzeczywistych z normalną topologią jest równoważne zbieżności. Potrzebne będą następujące rachunki:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

zatem

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \tag{1}$$

Zamieniamy miejscami n i m

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

zatem

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) \tag{2}$$

i ostatecznie z (1) i (2)

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$, znajdujemy stosowne N_x i N_y występujące w warunkach Cauchy'ego dla ciągów (x_n) i (y_n) dla $\frac{\varepsilon}{2}$. Definiujemy następnie $N = \max\{N_x, N_y\}$. Wiadomo więc, że

$$|d_n - d_m| = |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Ciąg (d_n) spełnia więc warunek Cauchy'ego.