Kryterium Gaussa

Jeśli dla danego szeregu stosunek $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ można przedstawić w postaci

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = b + \frac{c}{n} + \frac{d_n}{n^2}$$

gdzie b i c są stałe, zaś (d_n) jest ciągiem ograniczonym, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest:

→ zbieżny, jeśli $b>1$ lub $b=1$ i $c>1$

→ rozbieżny, jeśli $b<1$ lub $b=1$ i $c \leq 1$.

Dowód:

Ponieważ (d_n) jest ograniczony, to

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = b$, przypadki $b<1$ i $b>1$ sprowadzają się do znanego kryterium d'Alemberta.

Jeśli $b=1$, to mamy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{c}{n} + \frac{d_n}{n^2}$$

skąd dalej

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = c + \frac{d_n}{n}$$

co sprowadza się do kryterium Raabego, gdyż z ograniczoności (d_n) $\frac{d_n}{n}$ jest dowolnie małe.

Pozostaje przypadek $b=c=1$. Sprowadzić go można do kryterium Bertranda, w którym konstruuje się ciąg postaci

$$B_n = \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right].$$

W tym przypadku jeśli $\lim_{n\to\infty} B_n < 1$, to szereg jest rozbieżny, mamy zaś dla naszego szeregu

$$\ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = (\ln n) \cdot \frac{d_n}{n}$$

Wiadomo też, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ (co można łatwo wyliczyć z reguły de l'Hôpitala), z ograniczoności (α_n) zatem $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ i ciąg jest rozbieżny.

<u>Przykłady:</u>

1) Szereg hipergeometryczny

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)}\,x^n$$

gdzie $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\,x$

więc dla $|x|\neq 1$ o zbieżności rozstrzyga kryterium d'Alemberta. Dla $x=1$ mamy też

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\cdot\beta} =$$

$$= 1 + \frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n} + \frac{[\gamma-\alpha\beta-(\gamma+1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)]n^2-[\alpha\beta(\gamma+1-\alpha-\beta)]n}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\cdot\beta}\cdot\frac{1}{n^2} =$$

$$= 1+\frac{c}{n}+\frac{d_n}{n^2}$$

Widać, że (d_n) ma granicę właściwą, jest więc też ograniczony. Szereg jest więc zbieżny dla $x=1$ jeśli $\gamma-\alpha-\beta>0$ i rozbieżny dla $\gamma-\alpha-\beta\le 0$.

Dla $x=-1$ możemy wykazać, że zbieżny jest szereg wartości bezwzględnych ciągu, dla odpowiednio dużego n bowiem $\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}>0$ — jest więc on również zbieżny dla $\gamma-\alpha-\beta>0$.

~~2)~~ $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^p}$

~~Mamy~~ $\cancel{\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{(2n-1)!!\,(2n+2)!!}{(2n)!!\,(2n+1)!!}\right)^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p}$

2) $$1+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\ldots+\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p+\ldots$$

Mamy tu

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{(2n-3)!!\,(2n)!!}{(2n-2)!!\,(2n-1)!!}\right)^p=\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{-p}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-p}$$

z wzoru Taylora w okolicy 0

$$(1+x)^\alpha=1+\cancel{p}\,\alpha\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2}+O(x^3)$$

więc dla $\alpha=-p$ i $x=-\frac{1}{2n}$ dostajemy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{2n}+\frac{p(p+1)}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Skąd szereg jest zbieżny dla $\frac{p}{2}>1$ i rozbieżny dla $\frac{p}{2}\leq 1$.