Kryterium Raabego

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n > 1 \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n < 1 \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 1 \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nie rozstrzyga

DOWÓD:

dobieramy r i s takie, że

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r > s > 1$$

Lemat:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = s < r$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^s$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n}\right)^s}$$

Ze zbieżności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s$ $\quad s > 1$ wynika zbieżność $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

Z rozbieżności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ wynika rozbieżność $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\square$

Kryterium Kummera

$c_n > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ rozbieżny

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} K$$

$K > 0$ zbieżny
$K < 0$ rozbieżny
$K = 0$ nie rozstrzyga

DOWÓD: dobieramy taką δ, że

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > \delta > 0$$

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > \delta a_{n+1} > 0$$

$$c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$$
$$\Downarrow$$
$c_n a_n$ jednostajnie malejący

$c_n > 0 \qquad a_n \geq 0 \qquad \lim_{n\to\infty} c_n a_n = g > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}) = a_1 c_1 - g$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}) > \sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$$

Ze zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\left(\frac{1}{c_{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{c_n}\right)}$$

Z rozbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\square$

- dla $c_n = 1$

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ zbieżny

$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ zbieżny d'Alembert