WYKŁAD 1

ELEMENTY TEORII MNOGOŚCI

PO PIERWSZE: Spoglądając na program studiów na pierwszym roku kierunku Fizyka zauważyli Państwo zapewne, że jest w nim bardzo dużo godzin przedmiotów matematycznych. Dyskusje nad tym ile i w jaki sposób uczyć matematyki na tym wydziale w zasadzie nie mają końca, jednak wszyscy są zgodni co do tego że matematyka jest fizykowi bardzo potrzebna. Ja uważam, że jest ona potrzebna z dwóch powodów: po pierwsze od czasu do czasu trzeba coś policzyć – planując eksperyment oszacować mierzone wielkości, żeby dobrać odpowiednie metody i urządzenia, opracować wyniki eksperymentu tak, żeby można było sprawdzić stawiane wcześniej hipotezy, jak bohater filmu Marsjanin sprawdzić, czy wystarczy ziemniaków i ile gratów trzeba wyrzucić z rakiety, żeby dolecieć do kolegów ... itd. Jest jednak drugi powód. Współczesna fizyka w zdecydowanej większości zajmuje się zjawiskami o których nie daje się rozmawiać w codziennym języku naturalnym. Są to zjawiska, które wymykają się intuicji, nie mają odpowiedników w makroskopowym świecie. Opisywanie takich zjawisk wymaga używanie odpowiedniego języka, a dostarcza go właśnie matematyka. Państwo, jako słuchacze kursu rozszerzonego będą uczyć się więc nie tylko metod rachunkowych, ale także (a może przede wszystkim) pewnego sposobu myślenia i formułowania wypowiedzi. Część merytoryczną wykładu zaczynamy więc od ustalenia pewnego języka, którym będziemy do siebie mówić.

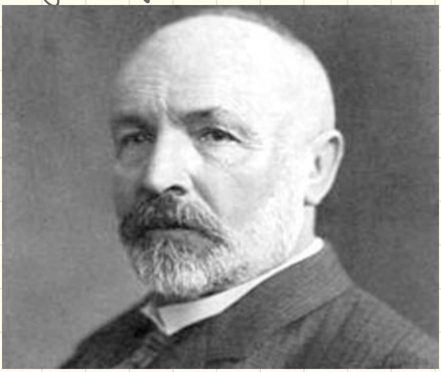
ZBIORY

KAZIMIERZ KURATOWSKI

1886–1980

„Pojęcie zbioru należy do najbardziej podstawowych i najczęściej stosowanych pojęć matematycznych"

Problem polega tu na tym, że zbiór uważa się za pojęcie podstawowe, tzn się go nie definiuje. Każdy wie co to jest zbiór, co to jest element zbioru tzn co to znaczy że „x należy do zbioru A". Okazuje się jednak, że zostawienie tego tak jak jest prowadzi do kłopotów. Załóżmy na chwilę, że wiemy co to znaczy że zbiór A jest większy od B. Chodzi tu o, najogólniej mówiąc, liczbę elementów zbioru. To może początkowo wydawać się niejasne w przypadku zbiorów o nieskończonej liczbie elementów, ale już za chwilę my też przyzwoicie to zdefiniujemy. Na razie przyjmijmy że wiemy co to znaczy że zbiór A ma więcej elementów niż B i przyjrzyjmy się następującemu rozumowaniu: Rozważa się zbiory, których elementami są inne zbiory. Np. prosta na płaszczyźnie jest pewnym zbiorem punktów. Możemy rozważać zbiór wszystkich prostych. Weźmy więc ustalony zbiór A i rozważmy zbiór wszystkich jego podzbiorów: 2^A. Istnieje twierdzenie które mówi że 2^A ma więcej elementów niż A. Zawsze. Dla dowolnego A. Twierdzenie to nie jest trudne – udowodnimy je wspólnie za chwilę. Niech więc A będzie zbiorem wszystkich możliwych zbiorów. Zgodnie z twierdzeniem 2^A jest większy niż A. Ale 2^A jest zbiorem zbiorów, zatem, zgodnie z definicją A, 2^A zawarty jest w A. Powinien więc być od A mniejszy, albo co najwyżej taki sam. Dochodzimy tu do sprzeczności, która nazywana jest Paradoksem Cantora. Paradoks Cantora pokazuje, że kwestii zbiorów nie można puścić całkiem na żywioł. Co prawda nadal nie definiujemy zbioru bezpośrednio, ale precyzujemy co wolno z nimi robić, jak wolno poszczególne zbiory definiować. Robi się to za pomocą sformułowania układu aksjomatów, czyli takich podstawowych zasad z których wolno nam wywodzić dalsze twierdzenia. Nie będziemy tutaj przytaczać pełnego zestawu aksjomatów. Kto zainteresowany – może je znaleźć np. w podręczniku Kuratowskiego. My omówimy tylko kilka aksjomatów, żeby zobaczyli Państwo w czym rzecz. Niektóre aksjomaty wydają się konstatować pewne oczywistości:



GEORG CANTOR 1845–1918

I : AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI

$$\forall A \, \forall B \, \big(\forall x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B \big)$$

Innymi słowy, jeżeli dwa zbiory mają te same elementy to są równe.

II: ISTNIENIE ZBIORU PUSTEGO

$$\exists X : \forall y \; \sim(y \in X) \qquad X = \emptyset$$

Z I i II wynika, że istnieje dokładnie jeden zbiór pusty

III: AKSJOMAT ISTNIENIA PODZBIORÓW

Niech φ będzie formułą zdaniową nie zawierającą zbioru B w swojej definicji.

$$\forall A \ \exists B : \forall x \quad (x \in B) \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge \varphi(x)$$

W zbiorze A istnieje podzbiór tych elementów dla których φ jest prawdziwa. W szczególności każdy zbiór A zawiera $\emptyset$. Aksjomat istnienia podzbiorów pozwala poradzić sobie z paradoksem Cantora. Spójrzmy na następujące rozumowanie: Na podstawie III wiemy, że można zadawać podzbiory przy pomocy warunków. Jeśli φ jest formułą zdaniową nie zawierającą Y, możemy napisać $Y = \{x \in S : \varphi(x)\}$. Załóżmy teraz, że istnieje zbiór wszystkich zbiorów i wstawmy go w miejsce S.

$$Y = \{x \in S : x \notin x\}$$

Y składa się więc z tych zbiorów, które nie są swoimi elementami. Y jest zbiorem na mocy aksjomatu III, więc można sprawdzić, czy Y spełnia formułę φ. Jak odpowiedzieć na pytanie czy $Y \in Y$? Rozważmy dwa przypadki: (1) Y spełnia φ, czyli zdanie $Y \in Y$ jest prawdziwe. Wtedy jednak $Y \notin Y$ na mocy definicji Y, czyli mamy sprzeczność! (2) A co jeśli $Y \notin Y$? Wtedy na mocy definicji Y mamy $Y \in Y$ i znów sprzeczność. Wygląda na to, że definicja Y nie jest poprawna. Powstała jednak na mocy zgodnej z III formuły. Założenie o istnieniu S-zbioru wszystkich zbiorów jest więc fałszywe.

IV AKSJOMAT SUMY

$\forall R \ \exists X : \forall u \ (u \in X) \Longleftrightarrow (\exists r : r \in R \ i \ u \in r)$ Innymi słowy R jest zbiorem zbiorów (z elementami oznaczanymi r) a X sumą wszystkich zbiorów należących do R. Zazwyczaj używamy nieco wygodniejszej notacji:

R jest pewnym zbiorem (indeksów) $(Y_r)_{r \in R}$ rodzinę zbiorów indeksowanych elementami z R, tzn mamy po jednym Y_r dla każdego $r \in R$. Wtedy X pojawiający się w aksjomacie piszemy

$$X = \bigcup_{r \in R} Y_r$$

V AKSJOMAT ZBIORU PODZBIORÓW

$$\forall A \; \exists P : \forall x \; (x \in P) \Leftrightarrow \big(\forall y \; (y \in X) \Rightarrow (y \in A)\big)$$

Zatem zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje, ale istnieje zbiór podzbiorów ustalonego zbioru. Pojawiający się w zapisie P oznaczamy zazwyczaj 2^A z powodów, które wyjaśnią się wkrótce.

... aksjomatów jest więcej ... ale nie będziemy ich wszystkich wymieniać. Wspomnę jeszcze o jednym, który jest o tyle ciekawy, że w zasadzie można bez niego żyć, ale matematyka, którą się wtedy uprawia jest nieco inna od tej „zwyczajnej."

AKSJOMAT WYBORU Dla każdej rodziny R parami rozłącznych zbiorów ($\tan$ $r, p \in R \Rightarrow r \cap p = \emptyset$) istnieje zbiór S taki do którego należy po jednym elemencie każdego ze zbiorów rodziny R. Ten aksjomat nazywa się też PEWNIKIEM WYBORU. Można pracować bez niego, ale nie daje się wtedy udowodnić pewnych twierdzeń. Wrócimy do tego w odpowiednim momencie. Zestaw aksjomatów, którymi się posługujemy nazywa się aksjomatykę Z F C

CHOICE

ERNST ZERMELO 1871–1953

ABRAHAM FRAENKEL 1891–1965

Jak widać świadomość konieczności uporządkowania podstaw matematyki to rzecz względnie nowa, jeśli przyjmiemy, że matematykę uprawiają ludzie od zawsze (czasy antyczne, Egipt ...)

Z tych wysoce filozoficznych wyżyn zejdziemy teraz na ziemię i zaczniemy budować słownik potrzebnych pojęć. Mam nadzieję, że nie będzie to zbyt nudne. Niech X i Y będą ustalonymi zbiorami.

Iloczynem kartezjańskim $X\times Y$ nazywamy zbiór par elementów z X i Y. Porządek ma znaczenie: $X\times Y=\{(x,y):\ x\in X \text{ i } y\in Y\}$

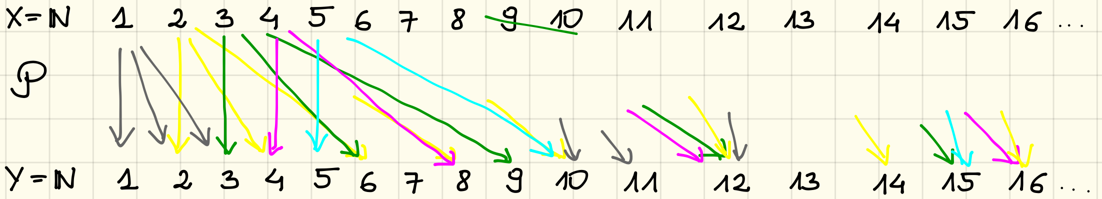
Relacją ze zbioru X do zbioru Y nazywamy podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $X\times Y$. Mówimy, że x jest w relacji z y jeśli $(x,y)\in R$. Ten sposób definiowania w pewien sposób utożsamia relację z wykresem tej relacji. Jednak zachowujemy tu kolejność $X \xrightarrow{R} Y$

dziedzina

przeciwdziedzina

Przykład X – zbiór psów, Y zbiór ludzi. Pies x jest w relacji z człowiekiem y jeśli y jest właścicielem x. To jest dość ogólna relacja: nie każdy pies ma właściciela, ale jeden pies może mieć więcej niż jednego właściciela. Nie każdy człowiek ma psa, ale też są tacy, którzy mają wiele psów.

Przykład Relacja podzielności $X=\mathbb{N}$, $Y=\mathbb{N}$ $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ Mówimy, że k jest w relacji z l jeśli k jest dzielnikiem l. Każda liczba $k\in\mathbb{N}$ jest w tej relacji z nieskończenie wieloma liczbami (swoimi wielokrotnościami). Każda liczba $l\in\mathbb{N}$ może występować na drugim miejscu tylko w skończonej liczbie par z tej relacji.



$$\mathcal{P}(2)=\{2,4,6,8\dots\}\quad (2,4)\ (2,6)\ (2,8)\ \dots \in \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}^{-1}(12)=\{1,2,3,4,6,12\}\ (1,12)\ (2,12)\ (3,12)\ (4,12)\ (6,12)\ (12,12)$$

Szczególnie przydatne są wyjątkowe relacje zwane **odwzorowaniami**. Relacja F jest odwzorowaniem jeśli dla każdego $x\in X$ istnieje dokładnie jeden $y\in Y$ taki, że $(x,y)\in F$.

$\forall x \in X \ \exists! y \in Y : (x,y) \in F$

zwykła strzałka

Używamy wtedy innej notacji $F: X \longrightarrow Y$ zamiast $(x,y) \in F$ piszemy $y = F(x)$. Obraz odwzorowania F:

$\operatorname{im} F = \{ y \in Y : \exists x : F(x) = y \}$ im F nie musi być równy Y

Przeciwobraz punktu $F^{-1}(y) = \{ x \in X : F(x) = y \}$

inaczej poziomica. Przyda się też obraz zbioru i przeciwobraz zbioru:

$A \subset X \quad F(A) = \{ y \in Y : \exists x \in A : F(x) = y \}$

$B \subset Y \quad F^{-1}(B) = \{ x \in X : F(x) \in B \}$ Dla odwzorowań $F^{-1}(Y) = X$

Pora na kilka dziwnych słów: Surjekcja – odwzorowanie takie, że $F(X) = Y$ Przykłady:

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(\xi, \eta) = \xi \eta^2$ jest surjekcją

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad g(t) = (\sin t, \cos t)$ nie jest surjekcją gdyż

$\operatorname{im} g = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = 1 \} \subsetneq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Injekcja to odwzorowanie różnowartościowe tzn spełniające warunek $F: X \rightarrow Y$

$\forall x_1, x_2 \in X \quad F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Przykład: $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad h(r) = (2r, r^2)$ jest injekcją. Istotnie, jeśli $h(r_1) = h(r_2)$ to $(2r_1, r_1^2) = (2r_2, r_2^2)$ czyli $2r_1 = 2r_2$ i $r_1^2 = r_2^2$. Już pierwszy warunek daje $r_1 = r_2$ $\square$

Ani f ani g z poprzedniego przykładu nie są injekcjami.

Odwzorowanie, które jest jednocześnie injekcją i surjekcją nazywamy bijekcja. Bijekcja jest to, mówiąc językiem nieformalnym połączenie w pary elementów zbiorów X i Y. Każdy element jest wykorzystany i każdy należy do jednej i tylko jednej pary. Pojęcie bijekcji można użyć do zdefiniowania równoliczności zbiorów. Mówimy, że zbiory X i Y są równoliczne jeśli istnieje bijekcja $f: X \to Y$ (oczywiście istnieje też bijekcja $Y \to X$, bo bijekcje są odwracalne). Zauważmy, że zdefiniowaliśmy równoliczność zanim dowiedzieliśmy się co to jest liczba elementów (moc) zbioru. Mocy zbioru w całej ogólności nie zdefiniujemy w ogóle. Rozróżnimy za to zbiory skończone i nieskończone. Zbiór X jest nieskończony jeśli istnieje podzbiór właściwy $A \subset X$ (tzn $A \neq X$) taki że A jest równoliczny z X.

Przykład: Zbiór $\mathbb{N}$ jest nieskończony - istotnie $A = 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \mathbb{N}$ i $f(n) = 2n$ jest bijekcją z $\mathbb{N}$ do A. Odcinek $[0,1]$ jest nieskończony bo $[0,\frac{1}{2}] \subset [0,1]$, $[0,\frac{1}{2}] \neq [0,1]$, $g(t) = \frac{1}{2}t$ jest bijekcją.

Mówimy że X jest mniej liczny niż Y X i Y nie są równoliczne i istnieje injekcja $X \to Y$. Teraz w końcu możemy sformułować twierdzenie o którym była mowa na początku wykładu. Przykłady równoliczności

TWIERDZENIE (Cantor) Zbiór X jest mniej liczny niż 2^X.

DOWÓD: Bardzo łatwo jest wskazać injekcję $X \to 2^X$, mianowicie

$$X \ni x \longmapsto \{x\} \in 2^X$$

Trudniej jest pokazać, że X i 2^X nie są równoliczne. Do tego celu użyjemy metody dowodzenia przez sprowadzenie do sprzeczności, czyli, w skrócie metody ad absurdum. Najpierw przeprowadzimy dowód a następnie poczynimy uwagi ogólne dotyczące tej metody.

Załóżmy, że istnieje bijekcja $\Psi: X \to 2^X$. Przy pomocy tej bijekcji zdefiniujmy pewien podzbiór $A \subset X$

$$A = \{x \in X : \ x \notin \Psi(x)\}$$

oczywiście $A \in 2^X$

musi zatem istnieć dokładnie jeden $y \in X$ taki, że $\Psi(y) = A$. Powstaje zatem pytanie czy $y \in A$ czy też $y \notin A$. Rozważmy przypadki: jeśli $y \in A$ to znaczy $y \in \Psi(y)$, ale wtedy $y \notin A$ bo z definicji elementy z A spełniają warunek $x \notin \psi(x)$. Mamy więc sprzeczność. Sprawdźmy zatem czy może być $y \notin A$ czyli $y \notin \psi(y)$, to zgodnie z definicją A $y \in A$ – znowu sprzeczność. Założenie że ψ istnieje prowadzi więc do sprzeczności □

Porozmawiajmy teraz o dowodzeniu ad absurdum. Metoda ta służy do dowodzenia prawdziwości implikacji $p \Rightarrow q$

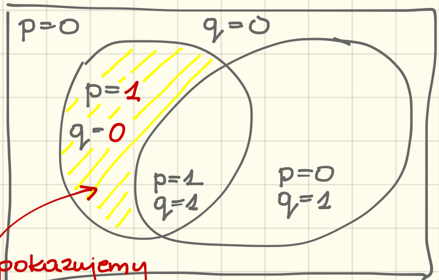
poprzednik (p), następnik (q)

Tabelka wartości logicznych implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

implikacja jest fałszywa tylko w jednym przypadku

dowodzenie prawdziwości implikacji może więc polegać na wykazaniu, że taka sytuacja nie zachodzi



w metodzie ad absurdum pokazujemy że $p=1$ $q=0$ nie może zajść czyli że przyjęcie $q=0$ prowadzi do sprzeczności z założeniem $(p=1)$

Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$

O mocy (czyli liczbie elementów zbioru) nie będziemy mówić w pewnej ogólności. Jeśli ktoś jest ciekaw niech poczyta o liczbach kardynalnych. Każdy zbiór skończony jest albo pusty (moc 0) albo równoliczny z $\{1, 2, \dots, n\}$ dla pewnego n. Według niektórych konstrukcji liczby naturalne to są wręcz moce zbiorów skończonych. Zbiory, które są równoliczne z $\mathbb{N}$ nazywamy przeliczalnymi. Istnieją także zbiory nieprzeliczalne, czyli bardziej liczne niż $\mathbb{N}$. Taki jest np. zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Moc zbioru $\mathbb{R}$ nazywa się continuum. Tu otwiera się przed Państwem cały duży obszar badań / wiedzy dotyczący hipotezy continuum itd. My nie będziemy się w to zagłębiać. Wykonamy natomiast pewne dość trudne ćwiczenie intelektualne: Dowodzenie równoliczności zbiorów przy pomocy wskazywania bijekcji jest często dość trudne. Znacznie łatwiej jest znajdować injekcje. Wobec tego praktyczne jest twierdzenie

TWIERDZENIE (Cantor – Bernstein – Schröder) Niech X i Y będą zbiorami. Wówczas jeśli istnieją injekcje $\varphi: X \to Y$ i $\psi: Y \to X$ to istnieje bijekcja między X i Y

FELIX BERNSTEIN
1878–1956

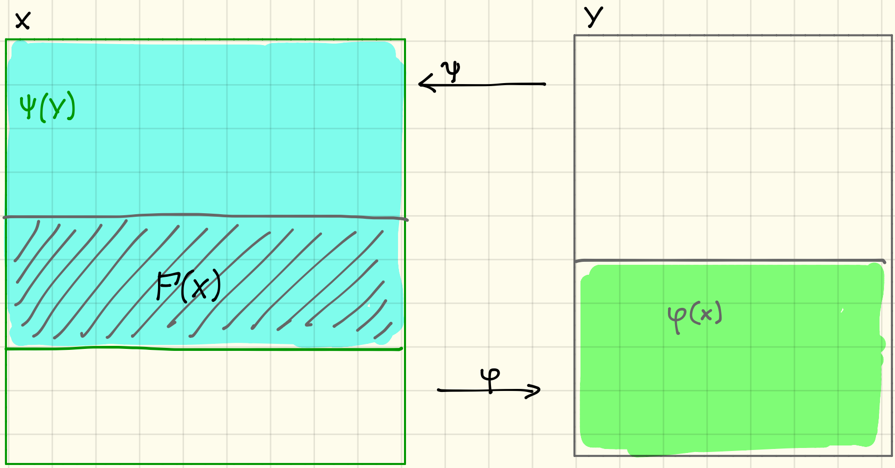
ERNST SCHRÖDER
1841–1902

Dowód polega na skonstruowaniu bijekcji przy pomocy danych injekcji φ i ψ

Zanim to zrobimy musimy uczynić uwagę na temat składanie odwzorowań. X, Y, Z zbiory $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ odwzorowania. Wówczas

$g \circ f: X \to Z$ jest odwzorowaniem

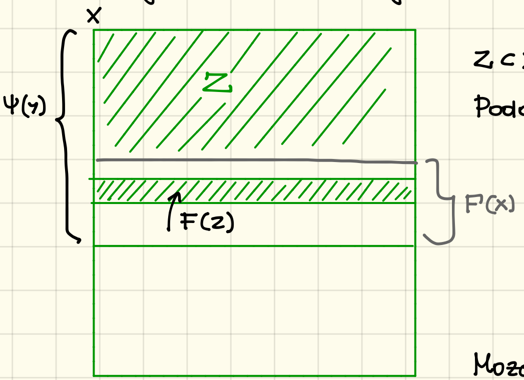
$(g \circ f)(x) = f(g(x))$



$F = \psi \circ \varphi$ $\quad F: X \to X \quad$ F jest injekcją.

Zbiory Y i $\psi(Y)$ są równoliczne, gdyż $\psi: Y \to \psi(Y)$ jest bijekcją. Wystarczy więc wykazać równoliczność X i $\psi(Y)$. Skonstruujemy odpowiednią bijekcję.

Konstruujemy pomocnicze zbiory: $Z = \psi(Y) \setminus F(X)$



$Z \subset X$ zatem $F(Z) \subset F(X)$

Podobnie $F \circ F(Z) =: F^2(Z) \subset F(X)$ i td

Drugi pomocniczy zbiór

$$S = Z \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(Z)$$

Możemy już teraz skonstruować bijekcję o którą chodzi. Oznaczmy ją G, tzn $G: X \to \psi(Y)$

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \in S \\ F(x) & \text{jeśli } x \notin S \end{cases}$$

Pokazanie, że G jest bijekcją wymaga trochę pracy.

(i) $G(X) \subset \psi(Y)$: Istotnie, na S G jest identycznością, tzn $G(S) = S \subset \psi(Y)$ a na $X \setminus S$ G działa jak F : $G(X \setminus S) \subset F(X) \subset \psi(Y)$. G działa między dobrymi przestrzeniami.

(ii) G jest injekcją: $G|_S$ jest identycznością, więc jest injekcją. $G|_{X \setminus S}$ jest równe $F|_{X \setminus S}$ więc też jest injekcją. Trzeba zatem tylko sprawdzić czy jeśli $x \in S$ i $y \in X \setminus S$ to może być $G(x) = G(y)$. Zgodnie z definicją G oznacza to $x = F(y)$.
W szczególności musiałoby być $F(y) \in S$

$$F(y) \in S \begin{cases} F(y) \overset{?}{\in} Z : \text{ wiemy, że } Z = \psi(Y) \setminus F(X) \text{ czyli } F(y) \notin Z \\ \text{lub} \\ F(y) \overset{?}{\in} F^k(Z) : \text{ Jeśli } F(y) \in F^k(Z) \text{ to } y \in F^{k-1}(Z) \subset S \text{ czyli } y \in S \\ \qquad \text{ale założyliśmy, że } y \in X \setminus S \end{cases}$$

(iii) G jest surjekcją. Mamy pokazać że $\forall a \in \psi(Y)\ \exists x \in X$ taki że $G(x) = a$
z definicji Z $\left(Z = \psi(Y) \setminus F(X)\right)$ mamy $\psi(Y) = Z \cup F(X)$. Jeśli $a \in Z$
to $a \in S$ i $G(a) = a$, zatem także $G^{-1}(a) = a$ $(x = a)$. Jeśli $a \notin Z$ to $a \in F(X)$
Wtedy mogą być dwa przypadki: $a \in S$ i $G(a) = a$, $G^{-1}(a) = a$ albo $a \notin S$, ale
nadal $a \in F(X)$ zatem z definicji zbioru $F(X)$ wynika, że istnieje $x : F(x) = a$.

Przykład konstrukcji G. □

TEMATY DODATKOWE:

1. Równoliczne są zbiory $[0,1]$; $]0,1]$; $]0,1[$ – znaleźć odpowiednie bijekcje. Podobnie równoliczne są zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ (zbiór liczb wymiernych) – zaproponować bijekcję. Równoliczne są także $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ – bijekcji szukać pod hasłem „krzywa Peano" lub „krzywa Hilberta"

2. Niech $X = Y = \{$ciągi o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}\}$ $\varphi = \psi$ $\varphi(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$
Skonstruować bijekcję G jak w dowodzie twierdzenia CBS.

3. Przekątniowy dowód nieprzeliczalności $\mathbb{R}$.

Do kompletu wiadomości z teorii mnogości potrzebne nam są jeszcze relacje równoważności. Jest to drugi (oprócz odwzorowań) bardzo ważny typ relacji. Relacja równoważności zawsze zadana jest z X do X, dlatego mówi się często „relacja równoważności w zbiorze X". Ze względu na własność symetrii nie rozróżniamy między dziedziną a przeciwdziedziną relacji.

Relację równoważności w zbiorze X nazywamy relację R spełniającą trzy warunki $(R \subset X \times X)$

(1) relacja jest zwrotna to znaczy $\forall x \in X \quad (x,x) \in R$

(2) relacja jest symetryczna to znaczy $\forall x,y \in X \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

(3) relacja jest przechodnia to znaczy

$$\forall x,y,z \in R \quad (x,y) \in R \text{ i } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

Dla relacji równoważności używamy często innej notacji niż dla ogólnych relacji. Piszemy $x \sim y$ zamiast $(x,y) \in R$. Ewentualnie, dla rozróżnienia wielu relacji dodajemy indeks: $x \sim_R y$

Relacje równoważności służą do utożsamiania elementów zbioru ze względu na wyróżnione cechy. Zanim podamy przykłady wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie i udowodnijmy stwierdzenie.

Klasą abstrakcji (albo klasą równoważności) ze względu na relację równoważności R nazywamy zbiór

$$[x]_R = \{y \in X : x \sim y\}$$

STWIERDZENIE: Niech X będzie zbiorem a R relacją równoważności w tym zbiorze. Dwie klasy abstrakcji są albo równe albo rozłączne. X jest sumą klas abstrakcji.

DOWÓD: Zacznijmy od wykazania, że klasy abstrakcji są albo równe albo rozłączne. Niech x i y będą elementami X. Rozważmy $[x]_R$ i $[y]_R$. Załóżmy najpierw, że x i y są w relacji R. Wtedy, oczywiście, $x \in [y]_R$ i $y \in [x]_R$. Możemy ponadto przeprowadzić następujące rozumowanie

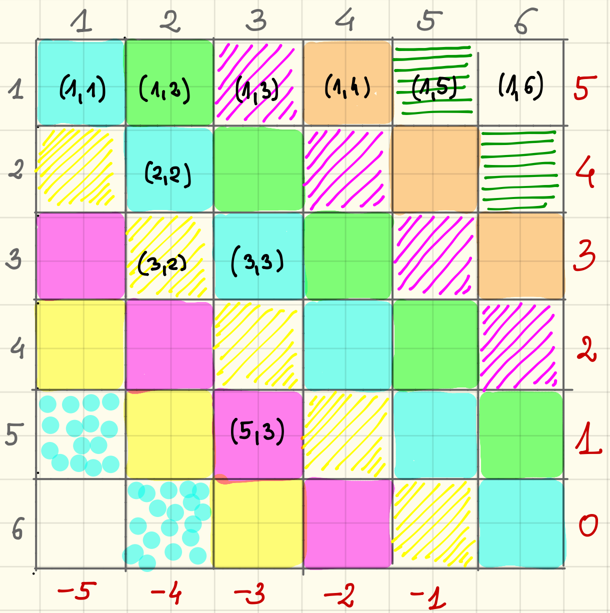
$z \in [x]_R$ tzn $(x,z) \in R$, z założenia $(x,y) \in R$, z przechodniości R wynika, że $(z,y) \in R$, tzn $z \in [y]_R$. Z dowolności z wynika $[x]_R \subset [y]_R$.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić zamieniając miejscami x i y. Dostajemy wtedy $[y]_R \subset [x]_R$, zatem ostatecznie $[x]_R = [y]_R$. Drugi przypadek ma miejsce kiedy $(y,x) \notin R$. Wykażemy (n.w.) że wtedy $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Załóżmy że istnieje $z \in [x]_R \cap [y]_R$. Wtedy $(x,z) \in R$ i $(y,z) \in R$. Na mocy przechodniości relacji R także $(y,x) \in R$, co przeczy założeniu.

Wiemy więc, że klasy abstrakcji są albo równe albo rozłączne. Wiadomo też, z definicji r.r., że $\forall x \in X \quad [x]_R \neq \emptyset$ bo zawsze $(x,x) \in R$, czyli $x \in [x]_R$. Zatem istotnie $X = \bigcup_{x \in R} [x]_R$ $\square$

PRZYKŁAD: Niech $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. W zbiorze par liczb naturalnych wprowadzamy relację $(m,n) \sim (m',n') \iff m + n' = n + m'$. Zaznaczmy klasy równoważności na obrazku. (verte)

Samo podzielenie na klasy nie jest może jeszcze takie ciekawe. Okazuje się jednak, że korzystając z dodawania liczb naturalnych można zdefiniować działanie na klasach równoważności. $[m,n] = \{(a,b) : a = m+k, b = n+k, k = 0,1,\dots\}$



$[m,n]+[a,b]=[m+a,n+b]$

Przede wszystkim należy sprawdzić, że działanie jest dobrze określone, tzn. że nie zależy od wyboru reprezentanta klasy równoważności. Z przemienności działania (która jest oczywista i wynika z przemienności dodawania w $\mathbb{R}$) wynika, że wystarczy sprawdzić niezależność wyniku od wyboru reprezentanta jednej z klas.

Załóżmy więc że $[m,n]=[m',n']$

$m+n'=n+m'$

i sprawdźmy, że $[m,n]+[a,b]=[m',n']+[a,b]$

$$[m,n]+[a,b]=[m+a,n+b]=[m+a+m'+n,\ n+b+m+n']=[a+m',\ b+n']=[m',n']+[a,b]$$

Wiemy już, że działanie jest dobrze określone. Zbadajmy teraz jego własności.

(1) Działanie to ma element neutralny $[m,m]$: $[a,b]+[m,m]=[a+m,b+m]=[a,b]$

(2) Każdy element ma element przeciwny: $[a,b]+[b,a]=[a+b,a+b]=[m,m]$

(3) Działanie jest przemienne i łączne.

(1),(2),(3) oznacza, że $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim, +)$ jest grupą przemienną. Jest ponadto wyróżniony element $[m,m+1]$ przy pomocy którego (dodając lub odejmując) można wygenerować dowolny element grupy.

dodając element przeciwny)

Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie

$$\mathbb{Z}\longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$$

$$0\longmapsto[(m,m)]$$

$$1\longmapsto[(m,m+1)]$$

$$\vdots$$

$$k>1 \qquad k\longmapsto[(m,m+k)]$$

$$-k\longmapsto[(m+k,m)]$$

Można sprawdzić, że odwzorowanie f jest bijekcją, zachowuje działanie dodawania, zatem jest izomorfizmem grup $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$

4. Skonstruować, używając relacji równoważności i zbiorów $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ liczby wymierne. Wprowadzić dodawanie i mnożenie. Sprawdzić, że jest O.K.