# RACHUNEK RÓZNICZKOWY

# REGUŁA de l'Hospitala

Guillaume François Antoine markiz de l'Hospital (1661–1704), autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego: „Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes"

Johann Bernoulli (1667–1748) prawdziwy autor twierdzenia

## PIERWSZA REGUŁA de l'Hospitala DLA ODCINKA

$f, g$ różniczkowalne na $]a,b[$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$, $g'(x) \neq 0$ for $x \in ]a,b[$

Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ to istnieje $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i obie granice są równe. $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

DOWÓD: Definiujemy $F, G$ na $[a,b[$ $\quad F(x) = \begin{cases} f(x) & x\in ]a,b[ \\ 0 & x = a \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & x\in ]a,b[ \\ 0 & x = a \end{cases}$

Dla $x \in ]a,b[$ funkcje $F, G$ spełniają typowe założenia dla odcinka $[a,x]$, tzn są ciągłe na domkniętym odcinku i różniczkowalne we wnętrzu. Dla pewnego $\xi \in ]a,x[$

$$\frac{\overset{f(x)}{\overset{\parallel}{F(x)}} - \overset{=0}{F(a)}}{\underset{\underset{g(x)}{\parallel}}{G(x)} - \underset{=0}{G(a)}} = \frac{\overset{=f'(\xi)}{F'(\xi)}}{\underset{=g'(x)}{G'(\xi)}} \rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ponadto jeśli $x \to a^+$ także $\xi \to a^+$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L \quad \blacksquare$$

## PIERWSZA REGUŁA de l'Hospitala DLA PÓŁPROSTEJ

$f,g: ]-\infty, c[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \quad g'(x)\neq 0$ dla $x\in ]-\infty,c[$

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ to istnieje $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ i granice są równe. $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

DOWÓD: dla $L\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \iff \forall \varepsilon>0\ \exists R\in\mathbb{R}: \forall x<R \quad L-\varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L+\varepsilon$. Weźmy $x<y<R$

Istnieje wówczas $\xi\in]x,y[$ takie, że $\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Skoro $\xi<y<R$ to zachodzi $L-\varepsilon<\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<L+\varepsilon$, wobec tego zachodzi też

$$L-\varepsilon < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} < L+\varepsilon$$

biorąc granicę $x\longrightarrow-\infty$

$f(x)\longrightarrow 0$

$g(x)\longrightarrow 0$

$$L-\varepsilon \leqslant \frac{f(y)}{g(y)} \leqslant L+\varepsilon$$

$\left|\frac{f(y)}{g(y)}-L\right|<\varepsilon$ tzn $\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=L$ ∎

Druga reguła de l'Hospitala dotyczy przypadku $\frac{\infty}{\infty}$

## DRUGA REGUŁA de l'Hospitala dla odcinka

$f,g: ]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ różniczkowalne, $g'(x)\neq0$ dla $x\in]a,b[$ $\quad \lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty=\lim\limits_{x\to a^+}f(x) \quad \lim\limits_{x\to a^+} g'(x) = -\infty$

Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ to istnieje $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ i obie granice są równe. $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

DOWÓD dla $L\in\mathbb{R}$ Ustalmy $\varepsilon>0$, istnieje $\delta$ taka, że dla $x\in]a,a+\delta[$ zachodzi $L-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\varepsilon$. Bierzemy $a<x<y<a+\delta$. Istnieje $\xi\in]x,y[$

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ mamy więc } L-\varepsilon<\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}<L+\varepsilon \quad \Big/ \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$$

to przez co mnożymy jest dodatnie: licznik dodatni, bo funkcja $g$ z założenia maleje w pobliżu $a$, ponadto $g(x)\longrightarrow+\infty$ dla $x\longrightarrow a^+$ więc mianownik też dodatni w pobliżu $a$

$$(L-\varepsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} < (L+\varepsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) \quad \Big/ + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$(L-\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0}\Big) + \frac{f(y)}{g(x)} < \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0} < (L+\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0}\Big) + \frac{f(y)}{g(x)} \xrightarrow{x\to a^+} 0$$

$$(L-\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{0 \xleftarrow{x\to a^+}}\Big)+\frac{f(y)}{g(x)} < \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0} < (L+\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\xrightarrow{x\to a^+} 0}\Big)+\frac{f(y)}{g(x)} \xrightarrow{x\to a^+} 0$$

Dla $x$ wystarczająco bliskich $a$ żółte dodatki są małe więc skrajne wyrażenie są bliskie $L-\varepsilon$ i $L+\varepsilon$ odpowiednio

$$L-\varepsilon \leqslant \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant L+\varepsilon \quad \text{dla dowolnego } \varepsilon$$

tzn $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$. ■

**PRZYKŁAD:**

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} \overset{H}{=} \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3\sin^2x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{x\,\cancel{\sin x}}{3\sin^{\cancel{2}}x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\overset{\to 1}{x}}{3\sin x\cos x} = \frac{1}{3}$$

**PRZYKŁAD DEMOTYWUJĄCY:**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}-2x\cos^2x+2x^2\cos x\sin x}{2x\sin^2x+2x^3\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2x\cos^2x+x^2\sin 2x}{2x\sin^2x+x^2\sin 2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x-2\cos^2x+4x\cos x\sin x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}{2\sin^2x+4x\sin x\cos x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x-2\cos^2x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}{2\sin^2x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{-4\sin 2x+2\sin 2x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}{2\sin 2x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x+12x\cos 2x+4x^2\sin 2x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{4\cos 2x+12\cos 2x-24x\sin 2x+8x\sin 2x+8x^2\cos 2x}{12\cos 2x+12\cos 2x-24x\sin 2x-8x\sin 2x-8x^2\cos 2x}=$$

$=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$ zamiast 4 razy różniczkować, lepiej rozwinąć, tzn. użyć wzoru Taylora.

**PRZYKŁAD**

$$\lim_{x\to0^+}x^x=? \qquad x^x=e^{x\log x} \qquad \log x^x = x\log x$$

$$\lim_{x\to0^+}x\log x=\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}x^x=\exp\Big(\lim_{x\to0^+}x\log x\Big)=$$

$$=1$$

# WZÓR TAYLORA

Niech $f: I \to \mathbb{R}$ będzie funkcję różniczkowalną. Jej funkcja pochodna $f': I \to \mathbb{R}$ jest obiektem matematycznym tego samego rodzaju co $f$, tzn funkcję rzeczywistą. Można wobec tego rozważać własności $f'$ podobnie jak $f$. Możemy pytać np czy $f'$ jest ciągła lub dalej, czy jest różniczkowalna. Jeśli $f'$ jest ciągła to o $f$ mówimy, że jest różniczkowalna w sposób ciągły lub, że jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $I$. Jeśli $f'$ jest różniczkowalna, mówimy że $f$ jest dwukrotnie różniczkowalna. Indukcyjnie definiujemy funkcje $k$-krotnie różniczkowalne i $k$-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły lub inaczej klasy $\mathcal{C}^k$.

Wzór Taylora dotyczy problemu przybliżania funkcji różniczkowalnej wiele razy przy pomocy wielomianu. Sama definicja różniczkowalności zapewnia, że funkcję różniczkowalną można dobrze przybliżyć funkcję afiniczną, czyli wielomianem stopnia 1.

dobrze, to znaczy różnica między wartością funkcji a przybliżeniem jest mała w tym sensie że

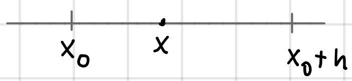
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + f'(x)h)}{h} = 0$$

Zapewne już Państwu wiadomo, że jeśli funkcja jest różniczkowalna $n$ razy (+ inne założenia), to właściwym kandydatem na wielomian przybliżający $f$ w otoczeniu $x_0$ jest

$$w_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

To, czy przybliżenie jest dobre stwierdzamy badając resztę, czyli $f(x) - w_k(x)$.

Niech $f: I \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^n$ na $I$, $[x_0, x_0+h] \subset I$, $f^{(n+1)}$ istnieje na $]x_0, x_0+h[$. Zdefiniujmy funkcję $\varphi: [x_0, x_0+h] \to \mathbb{R}$




$$\varphi(x) = f(x_0+h) - f(x) - \frac{(x_0+h-x)}{1!} f'(x) - \frac{(x_0+h-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \dots - \frac{(x_0+h-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

$$\varphi'(x) = -f'(x) + f'(x) - \frac{(x_0+h-x)}{1!} f^{(2)}(x) + \frac{(x_0+h-x)}{1!} f^{(2)}(x) - \frac{(x_0+h-x)}{2!} f^{(3)}(x) + \dots + \frac{(x_0+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + - \frac{(x_0+h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_0+h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

W szczególności $\varphi$ jest różniczkowalna na $]x_0, x_0+h[$ i ciągła na $[x_0, x_0+h]$

$\varphi(x_0+h) = 0 \qquad \varphi(x_0) \neq 0$

z punktu widzenia tw. Rolle'a trzeba to poprawić

Dla $k \in \mathbb{N}$ $\quad \phi(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x_0)}{h^k}(x_0+h-x)^k$

$$\phi(x_0) = \varphi(x_0) - \frac{\varphi(x_0)}{h^k}h^k = 0$$

$$\phi(x_0+h) = \varphi(x_0+h) = 0$$

$$\phi'(x) = \varphi'(x) + \frac{k\varphi(x_0)}{h^k}(x_0+h-x)^{k-1}$$

$\phi$ spełnia założenia tw. Rolle'a, więc istnieje $\xi \in \,]x_0, x_0+h[$ takie, że $\phi'(\xi)=0$ tzn

$$\varphi'(\xi) + \frac{k\varphi(x_0)}{h^k}(x_0+h-\xi)^{k-1} = 0$$

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_0+h-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$$

$$\frac{k\varphi(x_0)}{h^k}(x_0+h-\xi)^{k-1} = \frac{(x_0+h-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\varphi(x_0) = \frac{(x_0+h-\xi)^{n+1-k}}{n!\cdot k}h^k f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\varphi(x) = f(x_0+h) - f(x) - \frac{(x_0+h-x)}{1!}f'(x) - \frac{(x_0+h-x)^2}{2!}f^{(2)}(x) - \dots - \frac{(x_0+h-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$\varphi(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)h^2 + \dots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) =$$

$$= \frac{(x_0+h-\xi)^{n+1-k}}{n!\cdot k}h^k f^{(n+1)}(\xi)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \boxed{\frac{(x_0+h-\xi)^{n+1-k}}{n!\,k}h^k f^{(n+1)}(\xi)}$$

$R_{n+1}(x_0, h, k)$

RESZTA W POSTACI SCHLÖMLICHA

Biorąc konkretne $k$ dostajemy inne postacie reszty

$k = n+1$ $\quad R_{n+1}(x_0,h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$ RESZTA W POSTACI LAGRANGE'A

$k = 1$ $\quad R_{n+1}(x_0,h) = \frac{(x_0+h-\xi')^n h}{n!}f^{(n+1)}(\xi')$ RESZTA W POSTACI CAUCHY'EGO

$\xi' \in \,]x_0, x_0+h[$ tzn $\xi' = x_0 + \vartheta h$ $\quad \vartheta \in \,]0,1[$

$$= \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)$$

Sprawdźmy teraz, czy przybliżenie jest dobre, tzn policzmy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-W_n(h)}{h^n}$.
Użyjemy reguły de l'Hospitala

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n}\left(f(x_0+h) - \cancel{f(x_0)} - f'(x_0)\cdot h - \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)\cdot h^2 - \dots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\, h^n\right) \overset{H}{=}$$

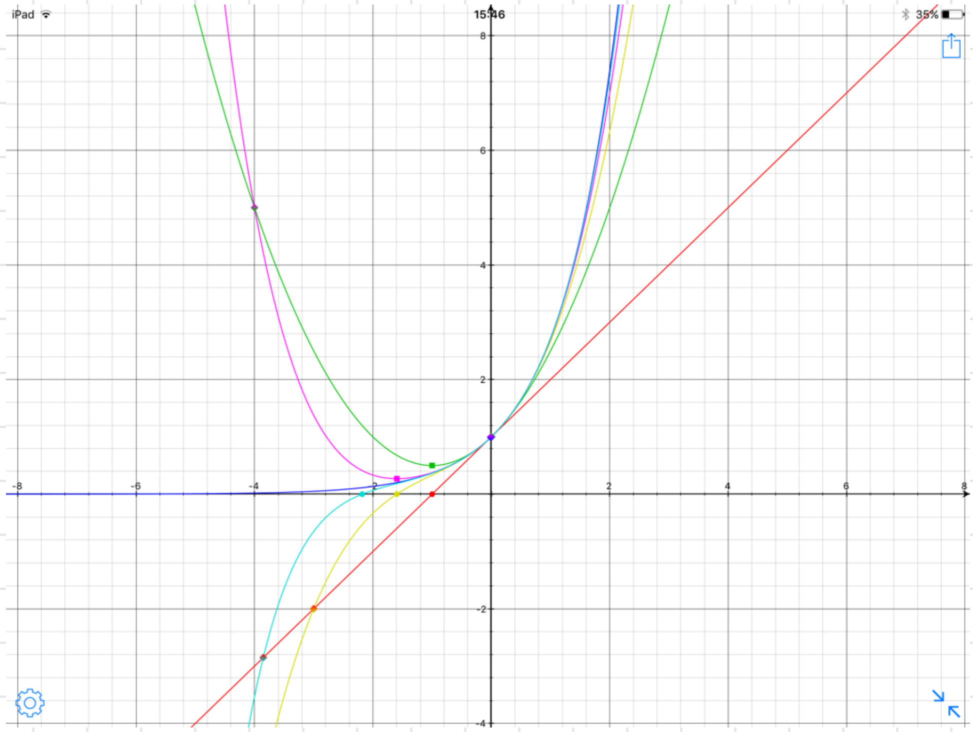
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{n h}\left(f'(x_0+h) - \cancel{f'(x_0)} - \frac{1}{1!}f^{(2)}(x_0)h - \dots - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)\, h^{n-1}\right) \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{n!\,h}\left(f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)h\right) =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f^{(n)}(x_0)\right) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0$$

BROOK TAYLOR
1685 - 1731 (46 l.)
Londyn (Anglia)

JAMES GREGORY
1638 - 1675 (37 l)
Aberdeen → Edynburg (Szkocja)




$x \mapsto e^x$

$x \mapsto 1+x$

$x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}$

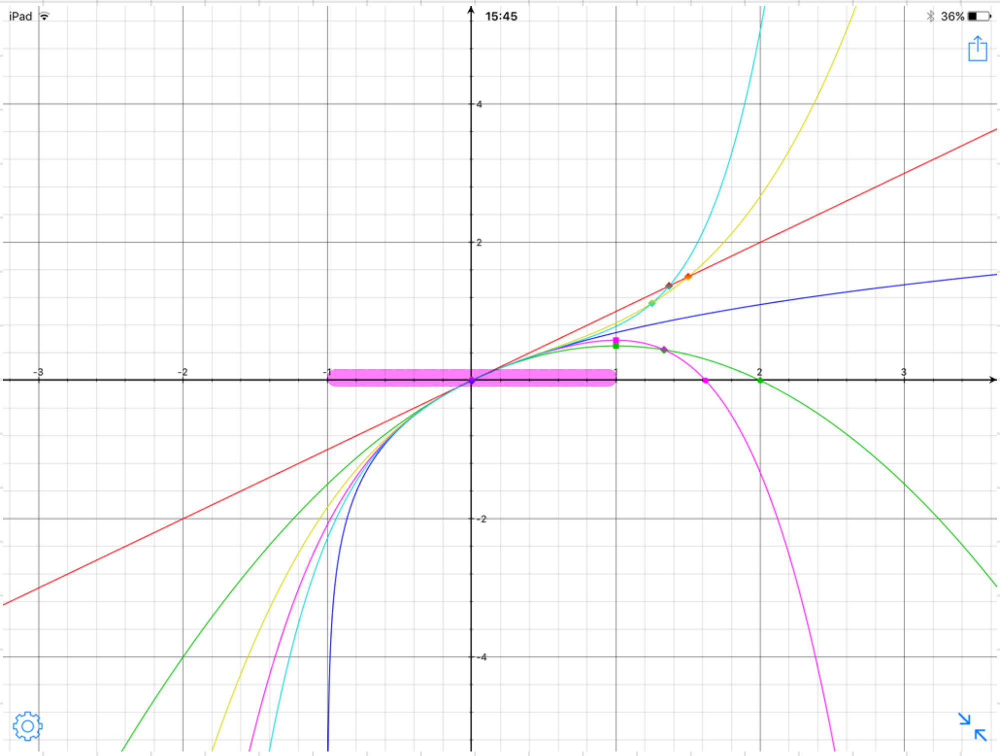
$x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

$x \mapsto 1+x+\dots+\frac{x^4}{24}$

$x \mapsto 1+x+\dots+\frac{x^5}{120}$

Im większe $n$ tym przybliżenie jest lepsze dla każdego $x$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} x^k$$




$x \mapsto \log(1+x)$

$x \mapsto x$

$x \mapsto x-\frac{x^2}{2}$

$x \mapsto x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

$x \mapsto x-\dots-\frac{x^4}{4}$

$x \mapsto x-\dots+\frac{x^5}{5}$

Jakość przybliżenia dla $x \mapsto \log(1+x)$ wzrasta wraz ze wzrostem $n$ jedynie dla $x \in ]-1,1]$

## ZAPOMNIANE STWIERDZENIE

$f: I \to \mathbb{R}$ (otwarty przedział), $x_0 \in I$, $f$ różniczkowalna $n$ razy, $f^{(n)}$ ciągła w $x_0$

Niech $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ wtedy
gdy $n = 2k+1$ $f$ nie ma ekstremum w $x_0$
gdy $n = 2k$ $f$ ma ekstremum w $x_0$; jeśli $f^{(n)}(x_0) > 0$ to $x_0$ jest lokalnym minimum, gdy $f(x_0) < 0$ to $x_0$ jest lokalnym maksimum.

DOWÓD:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + 0 + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\xi) \qquad \xi: |\xi| < |h|, \ \xi \text{ zależy od } h$$

z ciągłości $f^{(n)}$ w $x_0$ wnioskujemy, że dla małych $\xi$ znak $f^{(n)}(x_0+\xi)$ jest taki sam jak znak $f^{(n)}(x_0)$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\xi)$$

Gdy $n = 2k+1$ prawa strona zmienia znak przy przejściu $h$ przez zero.
Gdy $h = 2k$ prawa strona jest stałego znaku: dodatnia dla $f^{(n)}(x_0) > 0$ i ujemna dla $f^{(n)}(x_0) < 0$. Oznacza to, że $f(x_0+h) > f(x_0)$ dla $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\to$ $x_0$ jest minimum i $f(x_0+h) < f(x_0)$ dla $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\to$ $x_0$ jest maksimum ■

## FUNKCJE PIERWOTNE

Jednym z bardziej istotnych elementów ćwiczeń rachunkowych z analizy I jest nauka technik poszukiwania funkcji pierwotnych:

DEFINICJA: Niech $f: I \to \mathbb{R}$. Funkcję pierwotną dla $f$ nazywamy funkcję $F: I \to \mathbb{R}$ taką że $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

Oczywiście nie dla każdej funkcji istnieje funkcja pierwotna. Wiemy już że funkcja, która jest pochodną musi spełniać własność Darboux. My ograniczać się będziemy do funkcji ciągłych. Prawdziwy jest fakt

FAKT: Jeśli $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ jest ciągła to istnieje dla niej funkcja pierwotna.

Fakt powyższy jest bezpośrednią konsekwencją podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego o którym mowa będzie później przy dyskutowaniu całki w sensie Riemanna.

Z twierdzenia Lagrange'a $\left( f(b)-f(a) = (b-a)f'(\xi) \right)$ wynika, że funkcja, której pochodna jest zero, jest stała na składowych spójności swojej dziedziny. Oznacza to, że funkcja pierwotna wyznaczona jest z dokładnością do stałej. Często rozpatrujemy funkcję określoną na niespójnym zbiorze, np $x \mapsto \frac{1}{x}$ jest zdefiniowana na $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$. Funkcja pierwotna do niej to $x \mapsto \log x + C_1$ na $]0, \infty[$ i $x \mapsto \log(-x) + C_2$ na $]-\infty, 0[$. Tradycyjnie piszemy $x \mapsto \log|x| + C$ pamiętając jednak że stała może być różna na składowych spójności.

Tradycyjna notacja: Jeśli $F$ jest funkcją pierwotną dla $f$ piszemy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Funkcję pierwotną nazywamy także całką nieoznaczoną. Tradycyjna notacja pochodzi od związków funkcji pierwotnej z całką Riemanna. Jest wygodna przy praktycznym poszukiwaniu funkcji pierwotnych.

Poszukiwanie funkcji pierwotnych polega w dużym stopniu na zgadywaniu i nabywaniu doświadczenia. Oczywiście dla prostych funkcji zgadnąć nietrudno:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{ogólniej} \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \dots \text{itd}$$

W bardziej skomplikowanych przypadkach stosować można dwie podstawowe techniki: całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie.

## CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Mamy wzór $(f\cdot g)' = f'g + g'f$ tzn $f'g = (f\cdot g)' - g'f$

zatem $$\int \underbrace{f'(x)g(x)}\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Funkcję podcałkową musimy przedstawić jako iloczyn funkcji i pochodnej.

Przykład:

$$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$f(x) = x \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x$

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\log x - x + C$$

$f(x) = \log x \quad g'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = x$

## CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Technika wynikająca ze wzoru $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$. W funkcji, którą mamy do całkowania należy „rozpoznać" pochodną złożenia funkcji

$$\int f'(y(x))\,y'(x)\,dx = f(y(x)) + C$$

Przykład: $\int \operatorname{tg} x\,dx \quad x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x}\,dx =$$

$f(y) = \frac{1}{y} \quad y(x) = \cos x \quad y'(x) = -\sin x \quad f'(y(x)) = \frac{1}{\cos x} \qquad \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| + C$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{f(y)}$

$$= -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f'(y(x))}\;\overbrace{\cos'(x)}^{y'(x)}\,dx = \log|\cos(x)| + C = \log\cos x + C$$

dla $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Tradycyjne notacje:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int -\frac{dy}{y} = \log|y| + c = \log|\cos x| + C$$

$-dy$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\, dx$