

WYKŁAD 11

CALKA RIEMANNA

CAŁKA RIEMANNA

1.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ odcinek **złoty**, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja **ograniczona**

$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ $|I_i| = t_i - t_{i-1}$
 ↗ podział odcinka

SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x^2 + x^3$ as x goes from -5 to 8 using 10 rectangles taking samples at the **Maximum**.

Print estimated and actual areas?

Rectangle Color: **Light Gray** **Red**

Printed: **Replot**

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_k^* be an arbitrary point in the k th subinterval. Then the quantity $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_k$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the **lower and upper sums** for a constant mesh size.

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x^2 + x^3$ as x goes from -5 to 8 using 10 rectangles taking samples at the **Minimum**.

Print estimated and actual areas?

Rectangle Color: **Light Gray** **Red**

Printed: **Replot**

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_k^* be an arbitrary point in the k th subinterval. Then the quantity $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_k$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the **lower and upper sums** for a constant mesh size.

CAŁKA RIEMANNA

1.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ odcinek **złoty**, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja **ograniczona**

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \quad I_i = [t_{i-1}, t_i] \quad |I_i| = t_i - t_{i-1}$$

↑
podział odcinka

SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) |I_i|$$

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x^2 \cdot 3$ as x goes from -0.5 to 0.8 using **20** rectangles taking samples at the **Maximum**.

Estimated Area = 0.0330482
Actual Area = 0.02145

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_i^* be an arbitrary point in the i th subinterval. Then the quantity

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_i$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the **lower** and **upper sums** for a constant mesh size.

Riemann Sum

Graph the Riemann sum of $x^2 \cdot 3$ as x goes from -0.5 to 0.8 using **20** rectangles taking samples at the **Minimum**.

Estimated Area = -0.0139009
Actual Area = 0.02145

Let a closed interval $[a, b]$ be partitioned by points $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, where the lengths of the resulting intervals between the points are denoted $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Let x_i^* be an arbitrary point in the i th subinterval. Then the quantity

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

is called a Riemann sum for a given function $f(x)$ and partition, and the value $\max \Delta x_i$ is called the **mesh size** of the partition.

If the limit of the Riemann sums exists as $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, this limit is known as the Riemann integral of $f(x)$ over the interval $[a, b]$. The shaded areas in the above plots show the **lower** and **upper sums** for a constant mesh size.

2.

Funkcja f jest ograniczona, tzn $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ są skończone.

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) (b-a) \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) (b-a)$$

odwzorowanie $\pi \mapsto \underline{S}(f, \pi)$, $\pi \mapsto \overline{S}(f, \pi)$ są ograniczone. Istnieje więc

$$\sup_{\pi} \underline{S}(f, \pi) = \int_{[a,b]}^- f$$

CAŁKA DOLNA

$$\inf_{\pi} \overline{S}(f, \pi) = \int_{[a,b]}^+ f$$

CAŁKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$

jeśli

$$\int_{[a,b]}^- f = \int_{[a,b]}^+ f \quad \text{Wspólną wartość oznaczamy} \quad \int_{[a,b]} f$$

Funkcja f jest ograniczona, tzn $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ są skończone.

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) (b-a) \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) (b-a)$$

odwrócenie $\pi \mapsto \underline{S}(f, \pi)$, $\pi \mapsto \bar{S}(f, \pi)$ są ograniczone. Istnieje więc

$$\sup_{\pi} \underline{S}(f, \pi) = \int_{[a,b]} f$$

CAŁKA DOLNA

$$\inf_{\pi} \bar{S}(f, \pi) = \int_{[a,b]} f$$

CAŁKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że f jest całkowna, jeśli

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f \quad \text{Wspólna wartość}$$

Całkę zdefiniowaną można iść spać...



, b]

Policzyć jakąś
całkę z definicji

JAKIE FUNKCJE SA,
CAŁKOWALNE?
opisać $\mathcal{D}([a, b])$

JAK PRAKTYCZNIE
LICZYĆ CAŁKI?

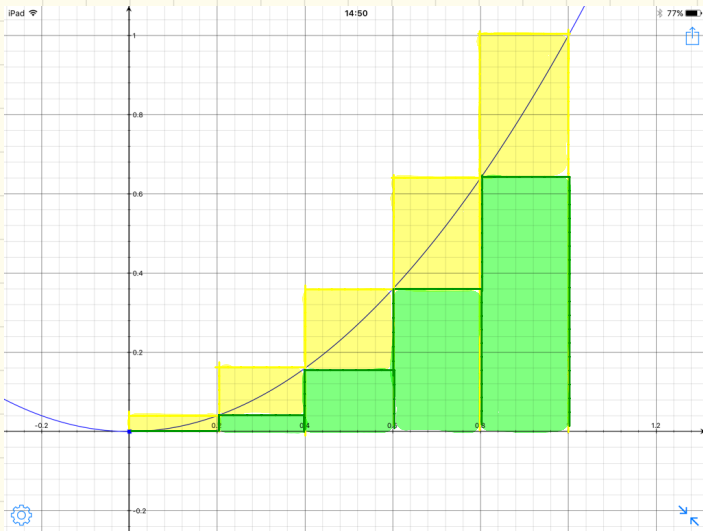
CO BĘDZIEMY ROBIĆ
DALEJ?

WŁASNOŚCI CAŁKI
RIEMANNA

Całki niewłaściwe
Zbieżność
Całki z parametrem
Całki w \mathbb{R}^n
...

ZADANIE: KORZYSTAJĄC Z DEFINICJI POLICZYĆ $\int_{[0,1]} f$ $f(x) = x^2$

4.



$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{J}_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)$$

$$\overline{S}(f, \mathcal{J}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$\overline{S}(f, \mathcal{J}_n) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_n) = \frac{1}{n}$ wiadomo, że $\forall \mathcal{J} \quad \underline{S}(f, \mathcal{J}) \leq \int f \leq \overline{S}(f, \mathcal{J})$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wiadomo, że istnieje n : $\frac{1}{n} < \varepsilon$, zatem

$\overline{S}(f, \mathcal{J}_n) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_n) < \varepsilon$, co za tym idzie $\overline{\int} f - \underline{\int} f < \varepsilon$. Z dowolności $\varepsilon \quad \underline{\int} f = \overline{\int} f$

f jest więc całkowalne

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5

To można wyprowadzić!

$$\sum_{i=0}^m i^3 = 0 + 1 + 2^3 + \dots + n^3 = A \quad B - A = (n+1)^3$$

$$\sum_{i=0}^m (i+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = B$$

$$\sum_{i=0}^n (i+1)^3 - i^3 = \sum_{i=0}^n [(i+1) - i] [(i+1)^2 + (i+1)i + i^2] = \sum (i^2 + 2i + 1 + i^2 + i^2)$$

$$= 3 \sum_{i=0}^n i^2 + 3 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1$$

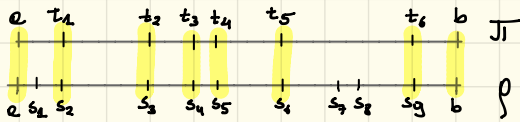
$$(n+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n + 1$$

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 = m^3 + 3m^2 + 3m - 3 \frac{n(n+1)}{2} - m - 6 \sum_{i=1}^n i^2 = 2n^2 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n =$$

$$= 2n^3 + 3m^2 + n = m(2n + 3n + 1) = m(2n + 1)(n + 1)$$

TWIERDZENIE f jest całkowalna na $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje π takie, że $\bar{\Sigma}(f, \pi) - \underline{\Sigma}(f, \pi) < \epsilon$.

DEFINICJA Podział ρ jest drobniejszy niż π jeśli $\pi < \rho$



Relacja „bycie drobniejszym” jest częściowym porządkiem w zbiorze podziałów, tzn. jest antysymetryczne i przechodnie

Dla każdego dwóch podziałów π i π' istnieje ρ późniejszy niż π i π' . Wystarczy wziąć $\rho = \pi \cup \pi'$

STWIERDZENIE: Jeśli ρ drobniejszy niż π zachodzi

$$\underline{\int} (f, \pi) \leq \underline{\int} (f, \rho) \leq \bar{\int} (f, \rho) \leq \bar{\int} (f, \pi)$$

DOWÓD oczywisty.

WNIOSEK Każde sumy dolne jest nie większe od każdej sumy górnej. Wobec tego cała dolna jest nie większe od całej górnej.

DOWÓD TWIERDZENIA Jeśli f całkowalna na $[a, b]$ to $\int f = \bar{\int} f$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ z definicji sup $\exists \pi$: $\int f - \underline{\int} (f, \pi) < \varepsilon/2$ podobnie $\exists \pi'$ $\bar{\int} (f, \pi') - \int f < \varepsilon/2$. Takie same nierówności zachodzą dla $\rho = \pi \cup \pi'$. Wtedy $\bar{\int} (f, \rho) - \underline{\int} (f, \rho) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

W drugą stronę dowód oczywisty, wynika z $\underline{\int} (f, \pi) \leq \int f \leq \bar{\int} (f, \pi)$. ■

JAKIE FUNKCJE SA, CAŁKOWALNE?

$\mathcal{R}([a, b])$

7

↙ całkowne w sensie Riemanna na $[a, b]$

STWIERDZENIE 1. $\mathcal{R}([a, b])$ jest podprzestrzenią wektorową $\text{Map}([a, b], \mathbb{R})$. Całka Riemanna jest funkcjonalnym liniowym na $\mathcal{R}([a, b])$

DOWÓD: Niech $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ $\underline{\int}(\lambda f, \pi) = \lambda \underline{\int}(f, \pi)$, $\overline{\int}(\lambda f, \pi) = \lambda \overline{\int}(f, \pi)$ wynika z tego, że $\underline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f$ i $\overline{\int} \lambda f = \lambda \overline{\int} f$. Jeśli więc $f \in \mathcal{R}([a, b])$ to $\underline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f = \lambda \overline{\int} f = \overline{\int} \lambda f$ więc $\underline{\int} \lambda f = \overline{\int} \lambda f = \int \lambda f$ tzn $(\lambda f) \in \mathcal{R}([a, b])$.

$\int \lambda f = \lambda \int f$. Gdy $\lambda < 0$ mamy $\overline{\int}(\lambda f, \pi) = \lambda \underline{\int}(f, \pi)$ oraz $\underline{\int}(\lambda f, \pi) = \lambda \overline{\int}(f, \pi)$,

dalej $\underline{\int} \lambda f = \lambda \overline{\int} f$, $\overline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f$... dalej oczywiste.

$$\overline{\int}(f+g, \pi) = \sum_i \sup_{I_i} (f+g) |I_i| \leq \sum_i [\sup_{I_i}(f) + \sup_{I_i}(g)] |I_i| = \overline{\int}(f, \pi) + \overline{\int}(g, \pi)$$

$$\underline{\int}(f+g, \pi) = \sum_i \inf_{I_i} (f+g) |I_i| \geq \sum_i (\inf_{I_i}(f) + \inf_{I_i}(g)) |I_i| = \underline{\int}(f, \pi) + \underline{\int}(g, \pi)$$

$$\underline{\int}(f, \pi) + \underline{\int}(g, \pi) \leq \underline{\int}(f+g, \pi) \leq \overline{\int}(f+g, \pi) \leq \overline{\int}(f, \pi) + \overline{\int}(g, \pi)$$

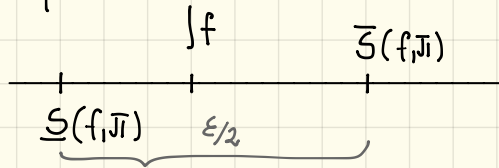
$$\underline{\int} (f, \pi) + \underline{\int} (g, \pi) \leq \underline{\int} (f+g, \pi) \leq \overline{\int} (f+g, \pi) \leq \overline{\int} (f, \pi) + \overline{\int} (g, \pi)$$

8

Wzłmy π : $\overline{\int} (f, \pi) - \underline{\int} (f, \pi) < \frac{\epsilon}{2}$ i $\overline{\int} (g, \pi) - \underline{\int} (g, \pi) < \frac{\epsilon}{2}$ wtedy

$$\overline{\int} (f+g, \pi) - \underline{\int} (f+g, \pi) < \epsilon \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}([a, b])$$

Dalej



\Rightarrow

$$\int f - \underline{\int} (f, \pi) < \frac{\epsilon}{2} \quad \int g - \underline{\int} (g, \pi) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\overline{\int} (f, \pi) - \int f < \frac{\epsilon}{2} \quad \overline{\int} (g, \pi) - \int g < \frac{\epsilon}{2}$$

podobnie dla g

$$\int (f+g) \leq \overline{\int} (f+g, \pi) \leq \overline{\int} (f, \pi) + \overline{\int} (g, \pi) < \int f + \int g + \epsilon$$

$$\int (f+g) \geq \underline{\int} (f+g, \pi) \geq \underline{\int} (f, \pi) + \underline{\int} (g, \pi) > \int f + \int g - \epsilon$$

$$\int f + \int g - \epsilon < \int f + \int g < \int f + \int g + \epsilon$$

\Downarrow

$$|\int f + \int g - (\int f + \int g)| < \epsilon \Rightarrow \int f + \int g = \int f + \int g$$

■

STWIERDZENIE 2 Jeśli $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, jeśli $f([a, b]) \subset J$ to $F \circ f \in \mathcal{R}([a, b])$

DOWÓD

f ograniczone, ten $c = \inf f$, $d = \sup f$ są skończone, $[c, d] \subset J$.

$F|_{[c, d]}$ jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie

ciągła ten dla $\varepsilon > 0 \exists \delta \forall y_1, y_2 \in [c, d] |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy odpowiednie δ , można przyjąć $\delta < \varepsilon$. Weźmy $\pi: \mathcal{S}(f, \pi) - \underline{\mathcal{S}}(f, \pi) < \delta^2$. Oznaczenie:

$$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad I_i = [t_{i-1}, t_i] \quad M_i = \sup_{I_i} f(x) \quad m_i = \inf_{I_i} f(x) \quad \tilde{M}_i = \sup_{I_i} F \circ f \quad \tilde{m}_i = \inf_{I_i} F \circ f$$

$$K = \sup_{[c, d]} |F(y)| \quad \{0, 1, \dots, n\} = A \cup B$$

$$i \in A \Leftrightarrow M_i - m_i < \delta$$

$$i \in B \Leftrightarrow M_i - m_i \geq \delta$$

$$i \in A \Rightarrow \tilde{M}_i - \tilde{m}_i < \varepsilon$$

$$\overline{\mathcal{S}}(F \circ f, \pi) - \underline{\mathcal{S}}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A \cup B} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i|$$

$$\sum_{i \in A} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i| < \sum_{i \in A} \varepsilon |I_i| < \varepsilon (b-a)$$

$$\delta \sum_{i \in B} |I_i| \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) |I_i| \leq \overline{S}(f, \mathcal{J}) - \underline{S}(f, \mathcal{J}) < \delta^2$$

$\xrightarrow{M_i - m_i \geq \delta \text{ dla } i \in B} \Rightarrow \delta \sum_{i \in B} |I_i| < \delta^2 \quad \sum_{i \in B} |I_i| < \delta$

$$\overline{S}(F \circ f, \mathcal{J}) - \underline{S}(F \circ f, \mathcal{J}) = \sum_{i \in A} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i) |I_i| + \sum_{i \in B} \overbrace{(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)}^{\leq 2k} |I_i| \leq \varepsilon (b-a) + 2k\delta < \varepsilon (b-a) + 2k\varepsilon = \varepsilon ((b-a) + 2k)$$

F o f jest więc całkowalna. ■

STWIERDZENIE 3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$ f jest całkowalna na każdym odcinku $[a, b]$
DOWÓD

Ustalmy $[a, b]$ i weźmy \mathcal{J}_n - podział $[a, b]$ na n równych części
 $t_0 = a, t_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, t_n = b$

$$\overline{S}(f, \mathcal{J}) - \underline{S}(f, \mathcal{J}) = \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{i(b-a)}{n} - \left(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right) \right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} (b-a) = \frac{1}{n} (b-a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n: \frac{(b-a)}{n} < \varepsilon$$

WNIOSKI:

11

(i) z STW 2 i STW 3 wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne:

$$F = F \circ \text{id}$$

ciągła \nearrow \nwarrow całkowalne

(ii) Jeśli f, g całkowalne to $f \cdot g$ całkowalne: $f+g$ i $f-g$ są całkowalne z STW 1, $x \mapsto x^2$ jest ciągła, dalej z STW 1 i STW 2:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

(iii) $x \mapsto |x|$ jest ciągła, zatem jeśli f całkowalne, to $|f|$ całkowalne

Porównując odpowiednie sumy łatwo stwierdzić, że jeśli $f \leq g$ to $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
zatem także $\int f \leq \int |f|$, wiadomo też, że $-\int f = \int(-f) \leq \int |f|$

zatem

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

$[a, b]$ $[a, b]$

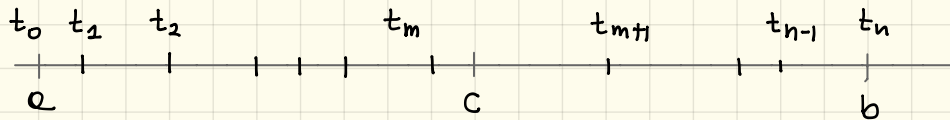
STWIERDZENIE 4 $f \in \mathcal{R}([a, b])$ $c \in]a, b[$. Wtedy $f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}([a, c])$
 i $f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}([c, b])$. Ponadto

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$$

12

DOWÓD:

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \exists \mathcal{J} : \bar{S}(f, \mathcal{J}) - \underline{S}(f, \mathcal{J}) < \varepsilon$$



Niech $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cup \{c\}$. Wówczas \mathcal{J}_0 jest drobniejszy niż \mathcal{J} i zachodzi

$$\bar{S}(f, \mathcal{J}_0) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_0) < \varepsilon$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = \{a, t_1, \dots, t_m, c\} \\ \text{podział } [a, c] \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{J}_2 = \{c, t_{m+1}, \dots, b\} \\ \text{podział } [c, b] \end{array}$$

$$S(f, \mathcal{J}) = S(f, \mathcal{J}_1) + S(f, \mathcal{J}_2)$$

$$\varepsilon > \bar{S}(f, \mathcal{J}_0) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_0) = \underbrace{\bar{S}(f, \mathcal{J}_1)}_{\text{green}} + \underbrace{\bar{S}(f, \mathcal{J}_2)}_{\text{red}} - \underbrace{\underline{S}(f, \mathcal{J}_1)}_{\text{green}} - \underbrace{\underline{S}(f, \mathcal{J}_2)}_{\text{red}}$$

$$\varepsilon > \bar{S}(f, \mathcal{J}) - \underline{S}(f, \mathcal{J}) = \underbrace{\bar{S}(f, \mathcal{J}_1)}_{\substack{\bar{S}(f, \mathcal{J}_1) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_1) < \varepsilon \\ f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}([a, c])}} + \underbrace{\bar{S}(f, \mathcal{J}_2)}_{\substack{\bar{S}(f, \mathcal{J}_2) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_2) < \varepsilon \\ f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}([c, b])}} - \underbrace{\underline{S}(f, \mathcal{J}_1)}_{\substack{\bar{S}(f, \mathcal{J}_1) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_1) < \varepsilon \\ f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}([a, c])}} - \underbrace{\underline{S}(f, \mathcal{J}_2)}_{\substack{\bar{S}(f, \mathcal{J}_2) - \underline{S}(f, \mathcal{J}_2) < \varepsilon \\ f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}([c, b])}}$$

13

RÓWNOŚĆ CAŁEK:

Ustalmy $\varepsilon > 0$

weźmy $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$: $\bar{S}(f|_{[a, c]}, \mathcal{J}_1) \leq \int_{[a, c]} f + \frac{\varepsilon}{2}$ $\bar{S}(f|_{[c, b]}, \mathcal{J}_2) \leq \int_{[c, b]} f + \frac{\varepsilon}{2}$

dla $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$: $\bar{S}(f, \mathcal{J}) = \bar{S}(f|_{[a, c]}, \mathcal{J}_1) + \bar{S}(f|_{[c, b]}, \mathcal{J}_2) \leq \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f + \varepsilon$ (*)

istnieje też ρ : $\bar{S}(f, \mathcal{J}) \leq \int_{[a, b]} f + \varepsilon$ (**)

dla ω drobniejszego od \mathcal{J} i ρ zachodzą obie nierówności

$\bar{S}(f, \omega) - \varepsilon$ $\bar{S}(f, \omega)$

$\int_{[a, b]} f$ $\int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$

$\left| \int_{[a, b]} f - \left(\int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f \right) \right| < \varepsilon$