WYKŁAD 11

# CAŁKA RIEMANNA

# CAŁKA RIEMANNA



$[a,b]\subset\mathbb{R}$ odcinek zwarty, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funkcja ograniczona

$\mathcal{J}=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ $\quad t_0=a<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=b$ $\quad I_i=[t_{i-1},t_i]$ $\quad |I_i|=t_i-t_{i-1}$

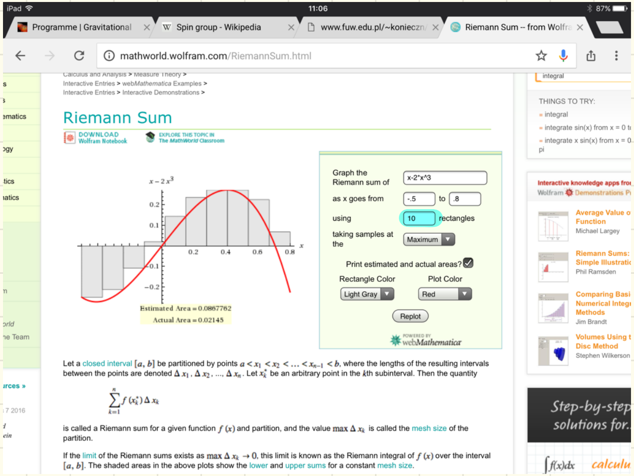
podział odcinka

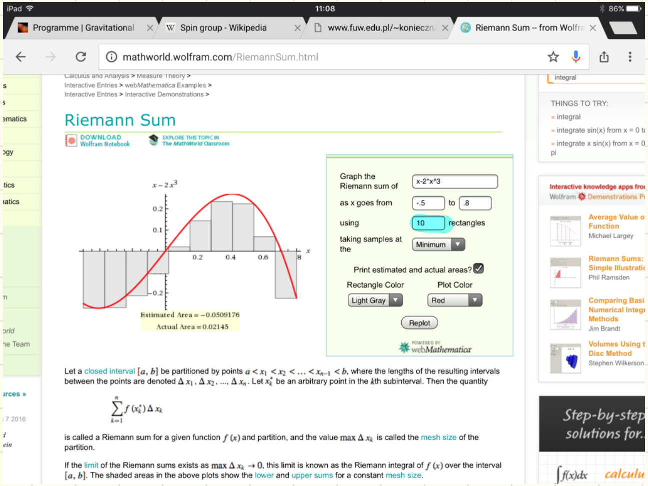
SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f,\mathcal{J})=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in I_i} f(x)\,|I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f,\mathcal{J})=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in I_i} f(x)\,|I_i|$$



# CAŁKA RIEMANNA



$[a,b] \subset \mathbb{R}$ odcinek zwarty, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ograniczona

$$\mathcal{J} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \qquad I_i = [t_{i-1}, t_i] \qquad |I_i| = t_i - t_{i-1}$$

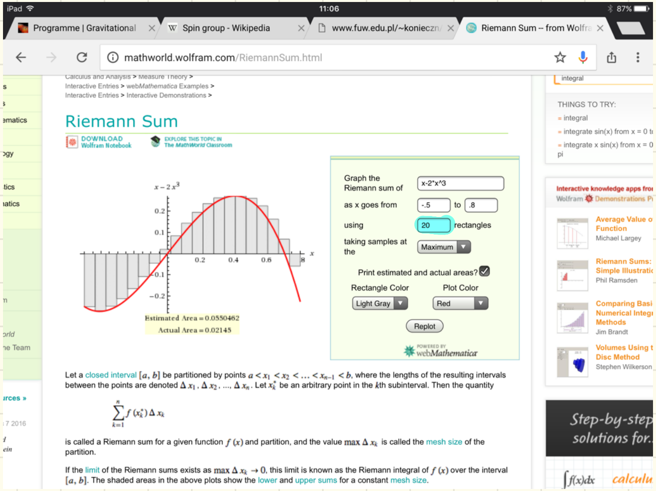
$\mathcal{J}$ – podział odcinka

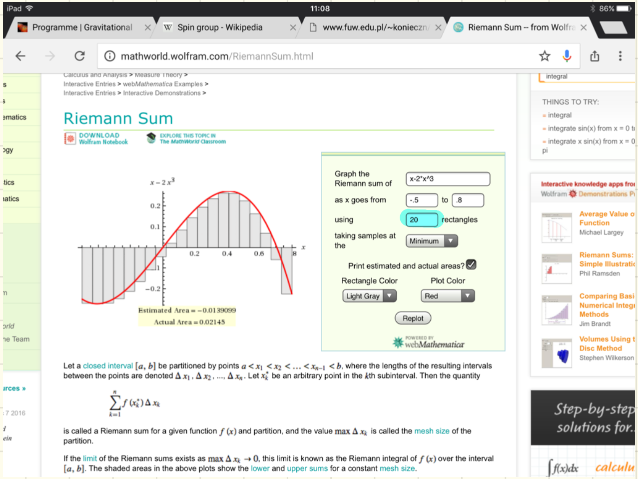
SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f, \mathcal{J}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)\, |I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f, \mathcal{J}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)\, |I_i|$$



# CAŁKA RIEMANNA



$[a,b]\subset\mathbb{R}$ odcinek zwarty, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funkcja ograniczona

$\mathcal{T}=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ $\quad t_0=a<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=b \qquad I_i=[t_{i-1},t_i] \qquad |I_i|=t_i-t_{i-1}$

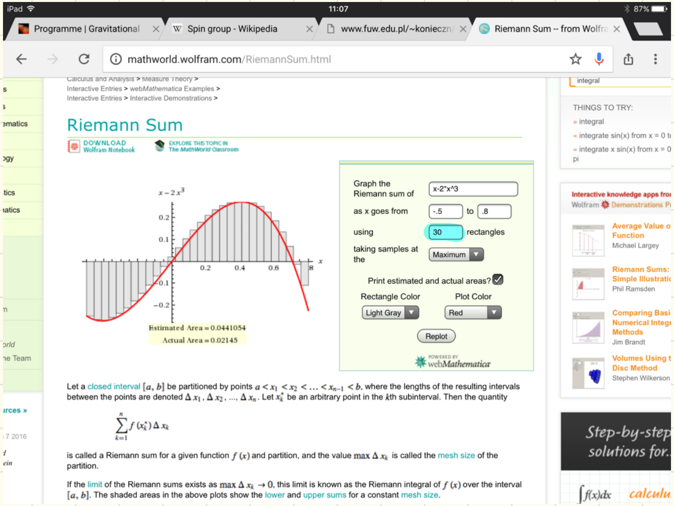
podział odcinka

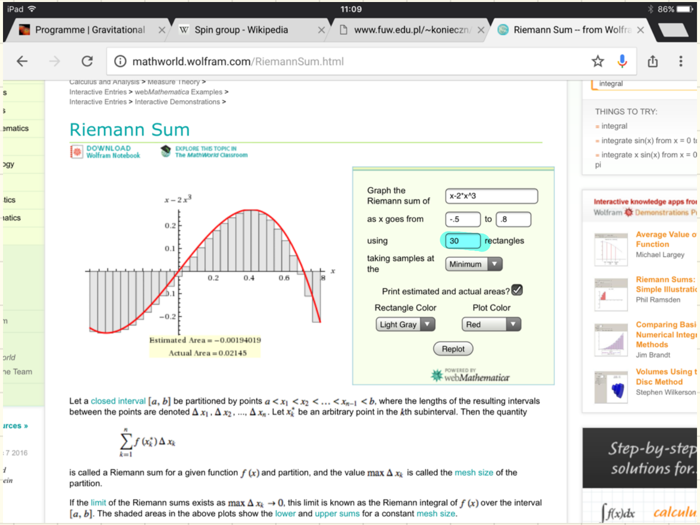
SUMA GÓRNA

$$\overline{S}(f,\mathcal{T})=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in I_i}f(x)\,|I_i|$$

SUMA DOLNA

$$\underline{S}(f,\mathcal{T})=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in I_i}f(x)\,|I_i|$$



Funkcja $f$ jest ograniczona, tzn $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ są skończone. **2.**

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)$$

odwzorowanie $\pi \longmapsto \underline{S}(f,\pi)$, $\pi \longmapsto \overline{S}(f,\pi)$ są ograniczone. Istnieją więc

$$\sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_{[a,b]}} f \qquad\qquad \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_{[a,b]}} f$$

CAŁKA DOLNA — CAŁKA GÓRNA

**DEFINICJA:** Mówimy, że $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ jeśli

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f .$$

Wspólną wartość oznaczamy $\int_{[a,b]} f$

Funkcja $f$ jest ograniczona, tzn $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ są skończone.

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a)$$

odwzorowanie $\pi \longmapsto \underline{S}(f,\pi)$, $\pi \longmapsto \overline{S}(f,\pi)$ są ograniczone. Istnieją więc

$$\sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_{[a,b]}} f \qquad\qquad \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_{[a,b]}} f$$

CAŁKA DOLNA

CAŁKA GÓRNA

DEFINICJA: Mówimy, że $f$ jest całkow ,b]
jeśli

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f \,.$$

Wspólną war

Całka zdefiniowana
można iść spać...

POLICZYĆ JAKĄŚ CAŁKĘ Z DEFINICJI

JAKIE FUNKCJE SĄ CAŁKOWALNE?
opisać $\mathcal{R}([a,b])$

CO BĘDZIEMY ROBIĆ DALEJ?

WŁASNOŚCI CAŁKI RIEMANNA

JAK PRAKTYCZNIE LICZYĆ CAŁKI?

Całki niewłaściwe
Zbieżność
Całki z parametrem
Całka w $\mathbb{R}^n$
⋮

ZADANIE: KORZYSTAJĄC Z DEFINICJI POLICZYĆ $\int\limits_{[0,1]} f \qquad f(x)=x^2$ **4.**


$$\Pi_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

$$\underline{S}(f,\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$\overline{S}(f,\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\dots+n^2\right)$$

$\overline{S}(f,\Pi_n)-\underline{S}(f,\Pi_n) = \frac{1}{n}$ wiadomo, że $\forall \Pi \quad \underline{S}(f,\Pi) \leqslant \underline{\int} f \leqslant \overline{\int} f \leqslant \overline{S}(f,\Pi)$

Ustalmy $\varepsilon>0$. Wiadomo, że istnieje $n$: $\frac{1}{n}<\varepsilon$, zatem

$\overline{S}(f,\Pi_n)-\underline{S}(f,\Pi_n)<\varepsilon$, co za tym idzie $\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f < \varepsilon$. Z dowolności $\varepsilon$ $\underline{\int} f = \overline{\int} f$

f jest więc całkowalne

5

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

To można wyprowadzić!

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0+1+2^3+\dots+n^3 = A \qquad B-A=(n+1)^3$$

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = 1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = B \qquad \sum_{i=0}^{n}(i+1)^3-i^3 = \sum_{i=0}^{n}\left[(i+1)-i\right]\left[(i+1)^2+(i+1)i+i^2\right] = \sum\left(i^2+2i+1+i^2+i+i^2\right)$$

$$= 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=1}^{1} 1$$

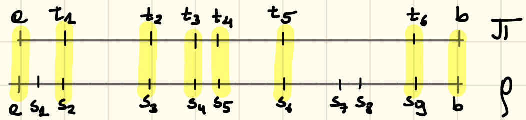
$$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+\cancel{1} = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n + \cancel{1}$$

$$3\sum_{1}^{n} i^2 = n^3+3n^2+3n-3\frac{n(n+1)}{2}-n \qquad 6\sum_{1}^{n} i^2 = 2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n =$$

$$= 2n^3+3n^2+n = n(2n^2+3n+1) = n(2n+1)(n+1)$$

**TWIERDZENIE** $f$ jest całkowalna na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\pi$ takie, że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$.

**DEFINICJA** Podział $\rho$ jest drobniejszy niż $\pi$ jeśli $\pi \subset \rho$




Relacja „bycia drobniejszym" jest częściowym porządkiem w zbiorze podziałów, tzn jest antysymetryczne i przechodnie

Dla każdych dwóch podziałów $\pi$ i $\pi'$ istnieje $\rho$ poźniejszy niż $\pi$ i $\pi'$. Wystarczy więc $\rho = \pi \cup \pi'$

**STWIERDZENIE**: Jeśli $\rho$ drobniejszy niż $\pi$ zachodzi

$$\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{S}(f,\rho) \leq \overline{S}(f,\rho) \leq \overline{S}(f,\pi)$$

**DOWÓD** Oczywisty.

**WNIOSKI** Każda suma dolna jest nie większa od każdej sumy górnej. Wobec tego całka dolna jest nie większa od całki górnej.

**DOWÓD TWIERDZENIA** Jeśli $f$ całkowalna na $[a,b]$ to $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ z definicji sup $\exists \pi$: $\underline{\int} f - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon/2$ podobnie $\exists \pi'$ $\overline{S}(f,\pi') - \overline{\int} f < \varepsilon/2$

Takie same nierówności zachodzą dla $\rho = \pi \cup \pi'$. Wtedy $\overline{S}(f,\rho) - \underline{S}(f,\rho) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

W drugą stronę dowód oczywisty, wynika z $\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \overline{S}(f,\pi)$. ∎

# JAKIE FUNKCJE SĄ CAŁKOWALNE?

$\mathcal{R}([a,b])$ ← całkowalne w sensie Riemanna na $[a,b]$

**STWIERDZENIE 1.** $\mathcal{R}([a,b])$ jest podprzestrzenią wektorową $\mathrm{Map}([a,b],\mathbb{R})$. Całka Riemanna jest funkcjonałem liniowym na $\mathcal{R}([a,b])$

**DOWÓD:** Niech $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ $\underline{S}(\lambda f, \pi) = \lambda \underline{S}(f,\pi)$, $\overline{S}(\lambda f, \pi) = \lambda \overline{S}(f,\pi)$ wynika z tego, że $\underline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f$ i $\overline{\int}\lambda f = \lambda \overline{\int} f$. Jeśli więc $f \in \mathcal{R}([a,b])$ to $\underline{\int}\lambda f = \lambda \underline{\int} f = \lambda \overline{\int} f = \overline{\int}\lambda f$ więc $\underline{\int}\lambda f = \overline{\int}\lambda f = \int \lambda f$ tzn $(\lambda f) \in \mathcal{R}([a,b])$ i $\int \lambda f = \lambda \int f$. Gdy $\lambda < 0$ mamy $\overline{S}(\lambda f, \pi) = \lambda \underline{S}(f,\pi)$ oraz $\underline{S}(\lambda f,\pi) = \lambda \overline{S}(f,\pi)$, dalej $\underline{\int}\lambda f = \lambda \overline{\int} f$, $\overline{\int}\lambda f = \lambda \underline{\int} f$ ... dalej oczywiste.

$$\overline{S}(f+g,\pi) = \sum_i \sup_{I_i}(f+g)|I_i| \leqslant \sum_i \left[\sup_{I_i}(f) + \sup_{I_i}(g)\right]|I_i| = \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi)$$

$$\underline{S}(f+g,\pi) = \sum_i \inf_{I_i}(f+g)|I_i| \geqslant \sum_i \left(\inf_{I_i}(f) + \inf_{I_i}(g)\right)|I_i| = \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi)$$

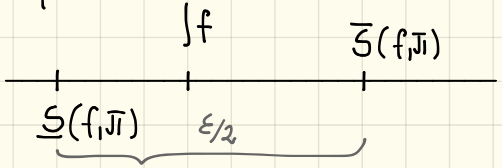
$$\underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi) \leqslant \underline{S}(f+g,\pi) \leqslant \overline{S}(f+g,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi)$$

$$\underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi) \leq \underline{S}(f+g,\pi) \leq \overline{S}(f+g,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi)$$

Weźmy $\pi$ : $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon/2$ i $\overline{S}(g,\pi) - \underline{S}(g,\pi) < \varepsilon/2$ wtedy

$$\overline{S}(f+g,\pi) - \underline{S}(f+g,\pi) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f+g \in \mathcal{R}([a,b])$$

Dalej




$\Rightarrow$

podobnie dla g

$$\int f - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon/2 \qquad \int g - \underline{S}(g,\pi) < \varepsilon/2$$

$$\overline{S}(f,\pi) - \int f < \varepsilon/2 \qquad \overline{S}(g,\pi) - \int \; < \varepsilon/2$$

$$\int(f+g) \leq \overline{S}(f+g,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi) < \int f + \int g + \varepsilon$$

$$\int(f+g) \geq \underline{S}(f+g,\pi) \geq \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi) > \int f + \int g - \varepsilon$$

$$\int f + \int g - \varepsilon < \int f+g < \int f + \int g + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \int f+g - \left(\int f + \int g\right) \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \int f+g = \int f + \int g$$

$\blacksquare$

**STWIERDZENIE 2** Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $F: J \to \mathbb{R}$ ciągła, jeśli $f([a,b]) \subset J$ to $F \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$ 9

**DOWÓD**

$f$ ograniczona, tzn $c = \inf f$, $d = \sup f$ są skończone, $[c,d] \subset J$.
$F|_{[c,d]}$ jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła tzn dla $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$ $\forall y_1, y_2 \in [c,d]$ $|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy odpowiednie $\delta$, można przyjąć $\delta < \varepsilon$. Weźmy $\pi$: $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \delta^2$. Oznaczenia:

$\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ $M_i = \sup\limits_{I_i} f(x)$ $m_i = \sup\limits_{I_i} f(x)$ $\tilde{M}_i = \sup\limits_{I_i} F \circ f$ $\tilde{m}_i = \inf\limits_{I_i} F \circ f$

$K = \sup\limits_{[c,d]} |F(y)|$ $\{0, 1, \ldots, n\} = A \cup B$

$i \in A \Leftrightarrow M_i - m_i < \delta$

$i \in B \Leftrightarrow M_i - m_i \geqslant \delta$

$i \in A \Rightarrow \tilde{M}_i - \tilde{m}_i < \varepsilon$

$$\overline{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A \cup B} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)\,|I_i|$$

$$\sum_{i\in A}(\tilde{M}_i-\tilde{m}_i)|I_i| < \sum_{i\in A}\varepsilon|I_i| < \varepsilon(b-a)$$

$$\delta\sum_{i\in B}|I_i| \leqslant \sum_{i\in B}(M_i-m_i)|I_i| \leqslant \overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi) < \delta^2$$

$M_i-m_i \geqslant \delta$ dla $i\in B$

$$\Rightarrow \delta\sum_{i\in B}|I_i| < \delta^2 \qquad \sum_{i\in B}|I_i| < \delta$$

$$\overline{S}(F\circ f,\Pi)-\underline{S}(F\circ f,\Pi) = \sum_{i\in A}(\tilde{M}_i-\tilde{m}_i)|I_i| + \sum_{i\in B}\overbrace{(\tilde{M}_i-\tilde{m}_i)}^{\leqslant 2K}|I_i| \leqslant \varepsilon(b-a)+2K\delta <$$

$$\varepsilon(b-a)+2K\varepsilon = \varepsilon\big((b-a)+2K\big)$$

$F\circ f$ jest więc całkowalna. ∎

**STWIERDZENIE 3** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x$ $f$ jest całkowalna na każdym odcinku $[a,b]$

**DOWÓD**

Ustalmy $[a,b]$ i weźmy $\Pi_n$ - podział $[a,b]$ na $n$ równych części

$t_0=a$, $t_1=a+\frac{b-a}{n}$, $\ldots$, $t_n=b$

$$\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\cancel{a}+\frac{i(b-a)}{n}-\left(\cancel{a}+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}(b-a)=\frac{1}{n}(b-a)$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n:\ \frac{(b-a)}{n}<\varepsilon$$

∎

## WNIOSKI:

(i) z STW 2 i STW 3 wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne:

$$F = \underset{\text{ciągłe}}{F} \circ \underset{\text{całkowalne}}{id}$$

(ii) Jeśli $f, g$ całkowalne to $f \cdot g$ całkowalna: $f+g$ i $f-g$ są całkowalne
z STW 1, $x \longmapsto x^2$ jest ciągła, dalej z STW 1 i STW 2:

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

(iii) $x \longmapsto |x|$ jest ciągła, zatem jeśli $f$ całkowalna, to $|f|$ całkowalna

Porównując odpowiednie sumy łatwo stwierdzić, że jeśli $f \leq g$ to $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$
zatem także $\int f \leq \int |f|$, wiadomo też, że $-\int f = \int (-f) \leq \int |f|$

zatem $$\boxed{\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|}$$

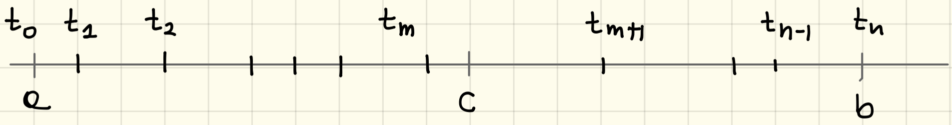
**STWIERDZENIE 4** $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $c \in ]a,b[$. Wtedy $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$ i $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$. Ponadto

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

12

**DOWÓD:**

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \exists \pi : \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$




Niech $\pi_0 = \pi \cup \{c\}$. Wówczas $\pi_0$ jest drobniejszy niż $\pi$ i zachodzi

$$\overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) < \varepsilon$$

$\pi_1 = \{a, t_1, \dots, t_m, c\}$ $\pi_2 = \{c, t_{m+1}, \dots, b\}$ $S(f,\pi) = S(f,\pi_1) + S(f,\pi_2)$

podział $[a,c]$ podział $[c,b]$

$$\varepsilon > \overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) = \overline{S}(f,\pi_1) + \overline{S}(f,\pi_2) - \underline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_2)$$

$$\varepsilon > \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \overline{S}(f,\pi_1) + \overline{S}(f,\pi_2) - \underline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_2)$$

$$\overline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_1) < \varepsilon$$

$$\overline{S}(f,\pi_2) - \underline{S}(f,\pi_2) < \varepsilon$$

$$f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$$

$$f_{|[b,c]} \in \mathcal{R}([b,c])$$

13

RÓWNOŚĆ CAŁEK:

Ustalmy $\varepsilon > 0$

weźmy $\pi_1, \pi_2$ : $\overline{S}(f_{|[a,c]}, \pi_1) \leqslant \int_{[a,c]} f + \varepsilon/2$ $\quad \overline{S}(f_{|[c,b]}, \pi_2) \leqslant \int_{[c,b]} f + \varepsilon/2$

dla $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ : $\overline{S}(f,\pi) = \overline{S}(f_{|[a,c]}, \pi_1) + \overline{S}(f_{[c,b]}, \pi_2) \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f + \varepsilon$ $\quad (*)$

istnieje też $\varrho$: $\overline{S}(f,\pi) \leqslant \int_{[a,b]} f + \varepsilon$ $\quad (**)$

dla $\omega$ drobniejszego od $\pi$ i $\varrho$ zachodzą obie nierówności

$\overline{S}(f,\omega) - \varepsilon$ $\qquad\qquad$ $\overline{S}(f,\omega)$

$\int_{[a,b]} f$ $\qquad\qquad$ $\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

$$\left| \int_{[a,b]} f - \left( \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \right) \right| < \varepsilon$$