WYKŁAD 12

CAŁKA RIEMANNA CD.
CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Przypominamy podstawowe tw. r.r.i.c.

TWIERDZENIE Jeżeli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ to $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ jest ciągła. Jeśli f jest ciągła to F jest różniczkowalna i $F'(x) = f(x)$ na $]a,b[$.

WNIOSEK Jeżeli f ciągła i G jest funkcją pierwotną dla f to $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ (*)
Istotnie, wiadomo, że $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ jest funkcją pierwotną do f. Funkcje pierwotne na odcinku różnić się mogą jedynie o stałą tzn

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{wobec tego} \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) - c = G(b) - G(a)$$

Stałą c wyznaczyć można biorąc $x = a$: $G(a) = \underbrace{F(a)}_{=0} + c = c$

PROBLEM: Niech f ma na $[a,b]$ skończoną liczbę punktów nieciągłości, ponadto niech G będzie pierwotna do f tam gdzie to możliwe. Czy wzór zachodzi? **PRZYKŁAD**

$f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $\quad G(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ -x+1 & x < 0 \end{cases}$ $\quad F(x) = |x|$

$\int_{-1}^1 f(t)dt = 0 \quad G(1) - G(-1) = 0 - 2 = \underset{\text{źle}}{-2} \quad F(+1) - F(-1) = 1 - 1 = \underset{\text{dobrze}}{0}$ — F jest ciągła a G nie!

TWIERDZENIE Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i F jest ciągłą funkcją pierwotną do f to $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Twierdzenie o całkowaniu przez części i przez podstawienie mają w wersji dla całki oznaczonej dodatkowe założenie

TWIERDZENIE O CAŁKOWANIU PRZEZ CZĘŚCI: $f, g, F, G \in C([a,b])$, $F' = f$, $G' = g$ na $]a,b[$ wtedy

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(t)G(t)dt$$

DOWÓD $(F \cdot G)' = fG + Fg$ Wiadomo że $\int_a^b (FG)'(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)G(t)dt$

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(t)G(t)dt$$

ciągłość f, g, F, G pozwala korzystać z p.t.r.r.i.c. wraz z wnioskiem ∎

TWIERDZENIE O CAŁKOWANIU PRZEZ PODSTAWIENIE: $\varphi \in C^1(I)$, $[a,b] \subset I$, $f \in C([a,b])$ φ ściśle monotoniczna na $[a,b]$. Wtedy

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx$$

DOWÓD: Niech F będzie ciągłą f. pierwotną do f, tzn $F'(y) = f(y)$. Funkcją pierwotną do $x \longmapsto (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)$ jest $F \circ \varphi$ – istotnie $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)$ ∎

Jeśli f ciągła i φ klasy C^1 to $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ ciągła.

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x) = (F\circ\varphi)(b)-(F\circ\varphi)(a) = F(\varphi(b))-F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

Warunek monotoniczności φ potrzebny jest aby $\varphi([a,b])=[\varphi(a),\varphi(b)]$ z dokładnością do kolejności $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$. ∎

BARDZO WAŻNY PRZYKŁAD:

Definiujemy $u(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ dla $x>0$. $t\mapsto\frac{1}{t}$ jest ciągła na $]0,\infty[$ wobec tego u jest różniczkowalna i $u'(x)=\frac{1}{x}$. Ponieważ $x\mapsto\frac{1}{x}$ jest klasy C^∞ na $]0,\infty[$ to u też.

Weźmy $a>0$ $\quad u(ax)=\int_1^{ax}\frac{1}{t}dt = \int_1^a\frac{1}{t}dt+\int_a^{ax}\frac{1}{t}dt = u(a)+\int_1^x \frac{1}{\cancel{a}y}\cancel{a}\,dy = u(a)+u(x)$

$t=ay$
$dt=a\,dy$
$t\in[a,ax]$ $y\in[1,x]$

$$u(ax)=u(a)+u(x)$$

u' jest dodatnie wobec tego u jest rosnąca. Dla $x>1$ $u(x)>0$ (całkowanie f. dodatniej). Ponadto $u(2^n)=n\cdot u(2)\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$ tzn $[0,\infty[\subset \operatorname{im} u$. Dla $0<x<1$ $u(x)$ jest ujemne. Ponadto $u(1)=0=u(x\cdot\frac{1}{x})=u(x)+u(\frac{1}{x})$, tzn $u(\frac{1}{x})=-u(x)$ więc $]-\infty,0]\subset \operatorname{im} u$. Ostatecznie $\operatorname{im} u=\mathbb{R}$ i u jest bijekcją. Z tw o różniczkowaniu f. odwrotnej f. odwrotna do u jest różniczkowalna. Oznaczmy ją η. $\eta'(y)=\frac{1}{u'(\eta(y))}=\frac{1}{\frac{1}{\eta(y)}}=\eta(y)$ $\quad \eta'(y)=\eta(y)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(1+t)}{t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}=1. \quad \text{weźmy } t=\frac{x}{n} \quad x>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\,n\,u(1+\tfrac{x}{n})=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}n\,u(1+\tfrac{x}{n})=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}u\left([1+\tfrac{x}{n}]^n\right)$$

$$\Rightarrow\ x=\lim_{n\to\infty}u\left([1+\tfrac{x}{n}]^n\right)=u\left(\lim_{n\to\infty}[1+\tfrac{x}{n}]^n\right)=u(e(x)) \quad x=u(e(x)) \Rightarrow \eta(x)=e(x)$$

u jest f. odwrotną do $x\mapsto e(x)$. Oczywiście $u(x)$ piszemy $\log(x)$ lub $\ln(x)$

Dla $a>0$ definiujemy $a^x=\exp(x\log a)$.

NIEWŁAŚCIWA CAŁKA RIEMANNA

W trakcie ćwiczeń z fizyki prowadzili Państwo zapewne następujące rachunki

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0-(-1)=1$$

łatwo stwierdzić że to co liczymy to

$x \quad e^{-x}$
$1 \quad -e^{-x}$

$\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}dx$, funkcja $x\longmapsto xe^{-x}$ jest całkowalna na $[0,R]$ dla dowolnego R.

Bywają też inne przykłady, np $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx$. Funkcja $x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx$ nie jest ograniczona na $]0,\infty[$, ponadto odcinek ten nie jest zwarty. Całkę jednak da się wyliczyć:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \cdots\cdots \int_0^\infty 2e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

$t=\sqrt{x}\quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Liczymy tu $\lim\limits_{r\to 0}\lim\limits_{R\to\infty}\int_r^R \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$. Funkcja podcałkowa jest całkowalna na $[r,R]$ dla dowolnych $r<R$

Potrzebujemy teorię całkowania funkcji po zbiorach niezwartych. Rozważać będziemy odcinki niezwarte. W dalszym ciągu I będzie oznaczać $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, ewentualnie domknięte na którymś końcu.

DEFINICJA Niech A będzie zbiorem. Relację skierowania nazywamy relację która jest (1) zwrotna, tzn $a\succ a$, (2) przechodnia, tzn $a\succ b$ i $b\succ c \Rightarrow a\succ c$ (3) $\forall a,b\ \exists c: c\succ a$ i $c\succ b$

PRZYKŁADY: Relacja „bycie drobniejszym" jest relacją skierowania w zbiorze podziałów odcinka. Relacja zawierania zbiorów definiuje relację skierowania w zbiorze podzbiorów ustalonego zbioru, tzn $A,B\subset X$ $A\succ B$ jeśli $A\supset B$

Zbiór z relacją skierowania nazywamy zbiorem skierowanym. Zbiory skierowane nadają się do numerowania ciągów nazywanych ciągami uogólnionymi. Dokładniej, ciągiem uogólnionym nazywamy odwzorowanie $\varphi: A\to\mathbb{R}$ gdzie A jest zbiorem skierowanym. Mówimy że ciąg uogólniony $(\varphi_a)_{a\in A}$ jest zbieżny jeśli istnieje liczba Φ taka, że zachodzi warunek

$$\forall \varepsilon>0\ \exists a\in A:\ \forall b\succ a\quad |\Phi-\varphi_b|<\varepsilon$$

Dla ciągów uogólnionych zachodzą niektóre twierdzenia dotyczące ciągów zwykłych. Np: monotoniczny i ograniczony ciąg uogólniony jest zbieżny, zbieżny rzeczywisty ciąg uogólniony jest Cauchy'ego, uogólniony rzeczywisty ciąg Cauchy'ego jest zbieżny ...

W tym języku całka dolna jest granicą uogólnionego ciągu sum dolnych względem relacji bycia drobniejszym.

Weźmy teraz odcinek I oraz oznaczmy $\mathcal{K}(I)$ - zbiór odcinków zwartych zawartych w I. Relacja zawierania definiuje w $\mathcal{K}(I)$ relację skierowania. Niech f będzie całkowalna na każdym zbiorze $K\subset\mathcal{K}(I)$. Definiujemy ciąg uogólniony

$$\phi_K(f) = \int_K f$$

DEFINICJA: Mówimy że f jest całkowalna na I lub że całka $\int_I f$ jest zbieżna jeśli istnieje granica ciągu uogólnionego $\phi_K(f)$ względem relacji zawierania

$$\int_I f = \lim_{\subset} \phi_K(f)$$

OBSERWACJA Zauważmy że definicja jest konsystentna z wcześniej zdefiniowaną całką po odcinku zwartym. Zauważmy, że jeśli $I=[a,b]$ to $I\in \mathcal{K}(I)$, wobec tego istnieje ϕ_I. Weźmy $I=[a,b]$, $K=[\alpha,\beta]$

$$|\phi_I-\phi_K| = \left|\int_{[a,\alpha]} f + \int_{[\beta,b]} f\right| \le \left|\int_{[a,\alpha]} f\right| + \left|\int_{[\beta,b]} f\right| \le (\alpha-a)M + (b-\beta)M \qquad M=\sup_{[a,b]}|f|$$

Ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy $a<\alpha<a+\frac{\varepsilon}{2M}$ i $b>\beta>b-\frac{\varepsilon}{2M}$, wtedy $\left|\phi_I-\phi_K\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M=\varepsilon$
Nierówność zachodzi dla $K\supset\left[a+\frac{\varepsilon}{2M}, b-\frac{\varepsilon}{2M}\right]$ zatem ϕ_I jest granicą ϕ_K

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE ZBIEŻNOŚCI CAŁKI Niech $f,g: I\to\mathbb{R}$ będą nieujemne i całkowalne na każdym odcinku zwartym w I. Jeśli $f\le g$ to z całkowalności g wynika całkowalność f.

DOWÓD: $K\mapsto\int_K g$ jest niemalejącym zbieżnym ciągiem uogólnionym z granicą $\int_I g$. Ciąg $K\mapsto\int_K f$ jest niemalejącym ciągiem uogólnionym spełniającym

$$\int_K f\le\int_K g\le\int_I g$$

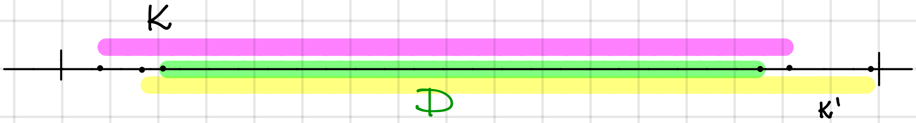
zatem $\int_K f$ jest ograniczony. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

TWIERDZENIE: Jeśli $|f|$ jest całkowalne na I to f też jest całkowalna na I

DOWÓD

Pokażemy, że $\int_K f$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z całkowalności $|f|$ wynika, że $\int_K|f|$ jest ciągiem Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy D takie, że dla $K\supset D$ i $K'\supset D$

$$\left|\int_K|f|-\int_{K'}|f|\right|<\varepsilon.$$



$K\supset D,\ K'\supset D \Rightarrow K\cap K'\supset D$

$$J=\overline{K\div K'} = \overline{K\setminus(K\cap K')}\cup\overline{K'\setminus(K\cup K')}$$

$$\left|\int_K f-\int_{K'} f\right| = \left|\int_J \overset{\pm f}{\tilde{f}}\right| \le \int_J |f| =$$

$$=\int_{\overline{K\setminus(K\cap K')}}|f|+\int_{\overline{K'\setminus(K\cap K')}}|f| \le \int_{\overline{K\setminus D}}|f|+\int_{\overline{K'\setminus D}}|f| = \underbrace{\int_K|f|-\int_D|f|}_{<\varepsilon}+\underbrace{\int_{K'}|f|-\int_D|f|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

DEFINICJA: Mówimy że $\int_I f$ jest bezwzględnie zbieżna jeśli zbieżna jest całka $\int_I|f|$

Poprzedni fakt pokazuje że jeśli całka jest bezwzględnie zbieżna to jest zbieżna. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe co pokazuje poniższy przykład:

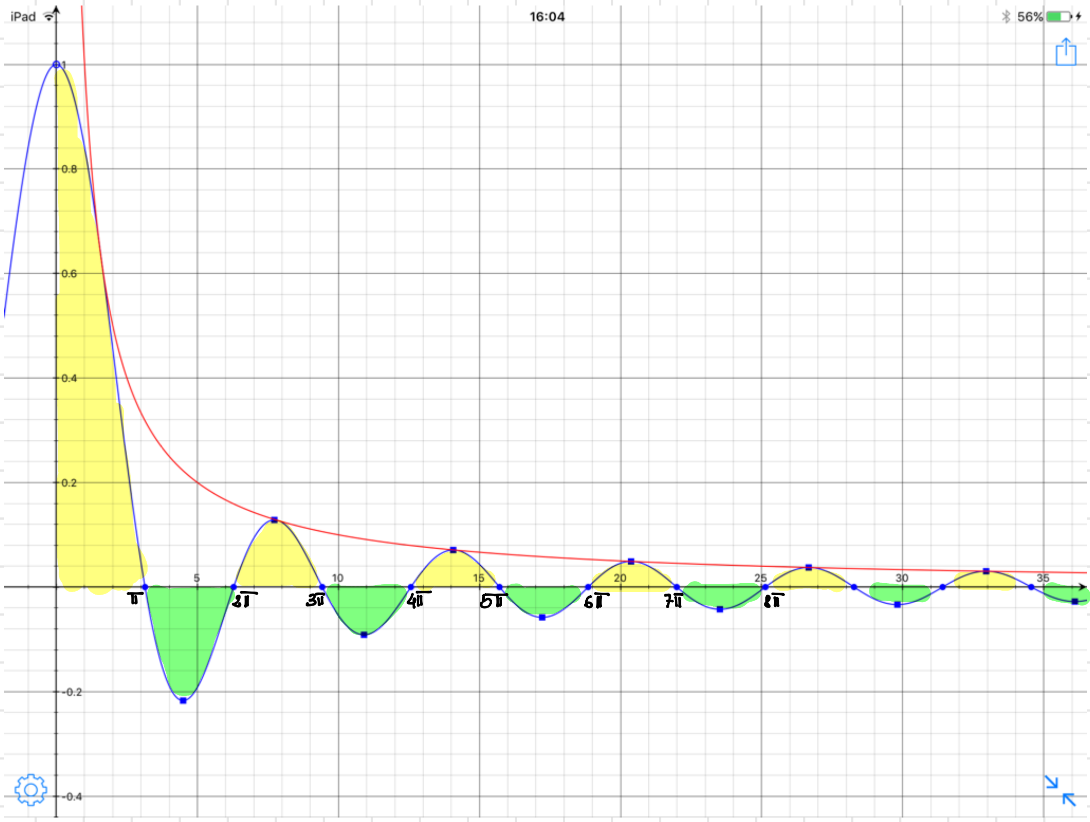
CAŁKA DIRICHLETA Zadanie polega na zbadaniu zbieżności warunkowej i bezwzględnej całki $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, czyli tzw. całki Dirichlet'a

Peter Gustaw Lejeune Dirichlet

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad f: \,]0,\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ możemy więc dookreślić f w $x=0$ tak, że $f\in C([0,\infty[)$. Całkę $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ rozumieć będziemy jako $\int_{[0,\infty[} f$. Do konstrukcji ciągu uogólnionego używamy $\mathcal{K}([0,\infty[)$ zawierającego w szczególności odcinki $[0,R]$, $R>0$.

Pokażemy, że ciąg uogólniony $K\longmapsto\int_K f$ jest ciągiem Cauchy'ego.



Rachunki pomocnicze: $P_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$ $\qquad \frac{\sin x}{(2n+1)\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant \sin x\cdot\frac{1}{2n\pi}$

$$\frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx \leqslant P_n \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(-1)+1=2$$

$$\frac{2}{(2n+1)\pi}\leqslant P_n\leqslant\frac{1}{n\pi}$$

Podobnie zielone $\quad Q_n = \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \left(-\frac{\sin x}{x}\right) dx \qquad \frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant Q_n \leqslant \frac{2}{(2n+1)\pi}$

Wkład do całki od odcinka $[2n\pi, (2n+2)\pi]$ to $P_m - Q_n$

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{2}{(2n+1)\pi} \leqslant P_m - Q_n \leqslant \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi}$$

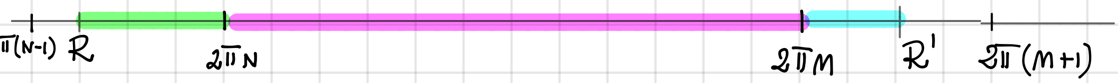
$$0 \leqslant P_n - Q_n \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

Wkład do całki od odcinka $[2n\pi, 2m\pi]$ $\quad m > n$

$$0 \leqslant \int_{2\pi n}^{2\pi m} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=m}^{m-1} P_k - Q_k \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right]$$

Ustalmy teraz $\varepsilon > 0$ i rozważmy odcinki $K = [0, R]$ i $K' = [0, R']$, $R' > R$

$$\int_{K'} f - \int_K f = \int_R^{R'} \frac{\sin x}{x} dx$$



$$\int_R^{R'} \frac{\sin x}{x} dx = \int_R^{2\pi N} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi N}^{2\pi M} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi M}^{R'} \frac{\sin x}{x} dx = D_1 + D_2 + D_3$$

mamy oszacowane

D_1 jest najmniejsze gdy jest równe $-Q_{N-1}$ $\qquad \frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant Q_n \leqslant \frac{2}{(2n+1)\pi}$

$-\frac{2}{(2N-1)\pi} \leqslant -Q_{N-1} \leqslant -\frac{1}{N\pi}$, zatem $-\frac{2}{(2N-1)\pi} \leqslant D_1$. $\quad D_1$ jest największe, gdy jest równe $P_{N-1} - Q_{N-1} \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$

$$D_1 \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$$

Ostatecznie $\quad -\frac{2}{(2N-1)\pi} \leqslant D_1 \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$

D_3 jest z dołu ograniczone przez 0 a z góry przez $P_m \leqslant \frac{1}{m\pi}$

$$0 \leqslant D_3 \leqslant \frac{1}{\pi M}$$

Dodajmy D_2: $\quad 0 \leqslant D_2 \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right)$

$$-\frac{2}{(2N-1)\pi} \leqslant D_1 + D_2 + D_3 \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{N-1} - \cancel{\frac{1}{N}} + \cancel{\frac{1}{M}} + \cancel{\frac{1}{N}} - \cancel{\frac{1}{M}}\right] = \frac{1}{\pi(N-1)}$$

$$-\frac{1}{(N-\frac{1}{2})\pi} \leqslant D_1 + D_2 + D_3 \leqslant \frac{1}{(N-1)\pi}$$

$$|D_1 + D_2 + D_3| \leqslant \max\left\{\frac{1}{\pi(N-\frac{1}{2})}, \frac{1}{\pi(N-1)}\right\} = \frac{1}{\pi(N-1)}$$

$\left| \int_{K'} f - \int_K f \right| \leq \frac{1}{\pi(N-1)}$ gdzie $N-1$ jest największą liczbą naturalną taką, że $2\pi(N-1) < R$

$\pi(N-1) < R/2$

$\frac{1}{\pi(N-1)} > 2/R$

$\frac{2}{R} < \frac{1}{\pi(N-1)} < \varepsilon \qquad R > \frac{2}{\varepsilon}$

Dla K, K' późniejszych niż $[0, \frac{2}{\varepsilon}]$ zachodzi $\left| \int_K f - \int_{K'} f \right| < \varepsilon$ $K \longmapsto \int_K f$ jest więc ciągiem Cauchy'ego co pokazuje, że całka Dirichleta jest zbieżna. Bezwzględna zbieżność nie zachodzi jednak.

$K_n = [\pi, n\pi] \quad K_{n+1} > K_n \quad n \longmapsto \int_{K_n} |f|$ jest rosnący gdyż $|f|$ dodatnie.

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq 2 \cdot \frac{1}{(k+1)\pi} \Rightarrow \int_{K_n} |f| \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ Ciąg uogólniony $K \longmapsto \int_K |f|$ zawiera nieograniczony rosnący podciąg. Całka nie jest więc zbieżna.

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ Weźmy podciąg $S_{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}$

$$\frac{1}{2} + \underset{\substack{\uparrow\\ 1/4}}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} + \underset{\substack{\uparrow\\ 1/8}}{\frac{1}{5}} + \underset{\substack{\uparrow\\ 1/8}}{\frac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\ 1/8}}{\frac{1}{7}} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \underset{\substack{\uparrow\\ 1/2^k}}{\frac{1}{2^{k-1}+1}} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k} = \frac{k}{2} \to \infty$$

Obserwacja: Rozważamy $\int_{[a,+\infty[} f$. Badanie zbieżności tej całki sprowadza się do badania istnienia granicy $\lim_{R \to \infty} \int_{[a,R]} f$. Jeśli więc istnieje ciągła funkcja pierwotna F dla f na $[a,+\infty[$ to $\int_{[a,+\infty[} f =$

$= \lim_{R \to \infty} F(R) - F(a)$.