WYKŁAD 13

NIEWŁAŚCIWA CAŁKA RIEMANNA CD.

Niech I, J będą odcinkami w $\mathbb{R}$. W kontekście niewłaściwej całki Riemanna prawdziwe są następujące stwierdzenia:

STWIERDZENIE 1 Jeśli $\int_I f$ i $\int_I g$ są zbieżne to także $\int_I \alpha f+\beta g$ jest zbieżna i $\int_I \alpha f+\beta g = \alpha\int_I f + \beta\int_I g$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

STWIERDZENIE 2 Jeśli $\int_I f$ jest zbieżne bezwzględnie to $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

STWIERDZENIE 3 Jeśli $I\cap J\neq\emptyset$ to $\int_{I\cup J} f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $\int_I f$ i $\int_J f$ są zbieżne. Gdy $I\cap J$ jest zbiorem jednopunktowym zachodzi równość $\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$.

BADANIE ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH: Najważniejsze i najczęściej stosowane dla funkcji dodatnich jest kryterium porównawcze o którym mówiliśmy w poprzednim wykładzie. Można je zapisać w alternatywnej formie: $f,g>0$ Jeśli istnieje $c>0$ takie że $\frac{f(x)}{g(x)}\leq c$ dla $x\in I\setminus K$, $K\in\mathcal{K}(I)$ to z całkowalności g na I wynika całkowalność f na I. Jeśli istnieje $d>0$ takie że $\frac{f(x)}{g(x)}\geq d$ dla $x\in I\setminus K$ to z rozbieżności $\int_I g$ wynika rozbieżność $\int_I f$.

$f,g>0$

Jeśli $I=[a,+\infty[$, ten sam fakt można zapisać inaczej: Jeśli istnieje $l=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ to z całkowalności g wynika całkowalność f. Jeśli $l>0$ to z rozbieżności $\int_I g$ wynika rozbieżność $\int_I f$.

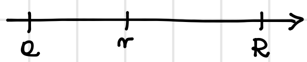
Dla funkcji nie będących stałego znaku mamy dwa kryteria całkowalności.

TWIERDZENIE (KRYTERIUM ABELA) $I=[a,+\infty[$, $\int_I f$ zbieżne, g monotoniczna i ograniczona na I. Wówczas $\int_I fg$ jest zbieżne

TWIERDZENIE (KRYTERIUM DIRICHLETA) $I=[a,+\infty[$, $F(x)=\int_a^t f(x)dx$ ograniczona dla $t\in I$, g monotoniczna na I oraz $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. Wówczas $\int_I fg$ jest zbieżne

LEMAT (WZÓR BONNETA) $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, g monotoniczna. Istnieje $\xi\in\,]a,b[$:

$$\int_{[a,b]} f\cdot g = g(a)\int_{[a,\xi]} f + g(b)\int_{[\xi,b]} f.$$

DOWÓD (K.A.)  z lematu $\int_{[r,R]} fg = g(r)\int_{[r,\xi]} f + g(R)\int_{[\xi,R]} f$. Funkcja g jest ograniczona, zatem $\exists c: |g(r)|<c, |g(R)|<c$

$$\left|\int_{[r,R]} fg\right| \leq |g(r)|\left|\int_{[r,\xi]} f\right| + |g(R)|\left|\int_{[\xi,R]} f\right| \leq c\left(\left|\int_{[r,\xi]} f\right| + \left|\int_{[\xi,R]} f\right|\right)$$

f jest całkowalna, dlatego dla wystarczająco dużych r $\int_{[r,\xi]} f$ oraz $\int_{[\xi,R]} f$ jest dowolnie małe. Ciąg $k\mapsto\int_k f$ jest bowiem ciągiem Cauchy'ego. Całka $\int_{[r,R]} fg$ jest więc też dowolnie mała dla wystarczająco dużych r, co pokazuje, że ciąg $k\mapsto\int_k fg$ jest ciągiem Cauchy'ego. $f\cdot g$ jest więc całkowalna.

DOWÓD (K.D.) Stosujemy ten sam wzór $\int_{[r,R]} fg = g(r)\int_{[r,\xi]} f + g(R)\int_{[\xi,R]} f$ dla $r\to\infty$ także $R\to\infty$ i $g(R)\to 0$

dla $r\to\infty$ $g(r)\to 0$

ograniczone z założenia

Podobnie jak poprzednio $\int_{[r,R]} fg$ jest dla dużych r dowolnie małe, zatem fg jest całkowalne.

Pozostaje nam udowodnienie lematu:

DOWÓD LEMATU: ① Udowodnimy najpierw, że jeśli $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $g \geq 0$, g nierosnąca to istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że $\int_{[a,b]} fg = g(a) \int_{[a,\xi]} f$.

W tym celu weźmy podział π odcinka $[a,b]$, $\pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ i zapiszmy

$$\int_{[a,b]} fg = \sum_i \int_{\underbrace{[t_{i-1}, t_i]}_{= D_i}} fg = \sum_i \int_{D_i} \left(g - g(t_{i-1}) + g(t_{i-1})\right) f = \underbrace{\sum_i \int_{D_i} (g - g(t_{i-1})) f}_{S_1} + \underbrace{\sum_i \int_{D_i} g(t_{i-1}) f}_{S_2} =$$

$$S^1 = \sum_i \int_{D_i} (g - g(t_{i-1})) f \qquad |S^1| = \left|\sum_i \int_{D_i} (g - g(t_{i-1})) f\right| \leq \sum_i \int_{D_i} |(g - g(t_{i-1})) f| \leq \sup_{[a,b]} f \sum_i \int_{D_i} |g - g(t_{i-1})|$$

$$\leq \sup_{[a,b]} f \underbrace{\sum_i |g(t_i) - g(t_{i-1})| |D_i|}_{\overline{S}(g,\pi) - \underline{S}(g,\pi)} = \sup_{[a,b]} f \left(\overline{S}(g,\pi) - \underline{S}(g,\pi)\right)$$

ze względu na całkowalność g tę sumę można wziąć dowolnie małą.

$$S^2 = \sum_i \int_{D_i} g(t_{i-1}) f = \sum_i g(t_{i-1}) \left[F(t_i) - F(t_{i-1})\right] = \qquad F(t) = \int_{[a,t]} f, \quad F \text{ ciągła}$$

$$= g(a)[F(t_1) - F(a)] + g(t_1)[F(t_2) - F(t_1)] + g(t_2)[F(t_3) - F(t_2)] + \dots + g(t_{n-1})[F(b) - F(t_{n-1})] =$$

$$= g(a)F(t_1) - g(a)F(a) + g(t_1)F(t_2) - g(t_1)F(t_1) + g(t_2)F(t_3) - g(t_2)F(t_2) + \dots + g(t_{n-1})F(b) - g(t_{n-1})F(t_{n-1}) =$$

$$= -g(a)F(a) + F(t_1)[g(a) - g(t_1)] + F(t_2)[g(t_1) - g(t_2)] + \dots + F(t_{n-1})[g(b) - g(t_{n-1})] + g(t_{n-1})F(b) =$$

$$= -g(a)\underbrace{\cancel{F(a)}}_{=0} + \sum_{i=1}^{n-1} F(t_i) \overbrace{[g(t_{i-1}) - g(t_i)]}^{\text{dodatnie}} + g(t_{n-1})F(b)$$

$$m = \inf_{[a,b]} F, \quad M = \sup_{[a,b]} F \qquad S^2 \leq M\left[g(a) - \cancel{g(t_1)} + \cancel{g(t_1)} - \cancel{g(t_2)} + \dots + \cancel{g(t_{n-2})} - \cancel{g(t_{n-1})} + \cancel{g(t_{n-1})}\right] = Mg(a)$$

podobnie $S^2 \geq mg(a)$

$$mg(a) \leq S^2 \leq Mg(a)$$
$$-\varepsilon \leq S^1 \leq \varepsilon$$

$$mg(a) - \varepsilon \leq S^1 + S^2 \leq Mg(a) + \varepsilon$$

$$mg(a) - \varepsilon \leq \int_{[a,b]} fg \leq Mg(a) + \varepsilon \qquad / : g(a)$$

$$m + \frac{\varepsilon}{g(a)} \leq \frac{1}{g(a)} \int_{[a,b]} fg \leq m + \frac{\varepsilon}{g(a)} \qquad \varepsilon \text{ jest dowolnie małe, więc mamy}$$

$$\underset{\inf F}{m} \leq \frac{1}{g(a)} \int_{[a,b]} fg \leq \underset{\sup F}{M}$$

wartość pośrednia $\Rightarrow$ istnieje ξ: $F(\xi) = \frac{1}{g(a)} \int_{[a,b]} fg$ $\qquad g(a) \int_{[a,\xi]} f = \int_{[a,b]} fg$

② Jeśli g jest nieujemna i niemalejąca można bardzo podobnie udowodnić, że istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że $\int\limits_{[a,b]} fg = g(b) \int\limits_{[\xi,b]} f$

③ Przechodzimy do dowodu samego wzoru Bonneta. Z założenia wiemy, że g jest monotoniczna. Jeśli g jest niemalejąca to $t \longmapsto g(b)-g(t)$ jest nierosnąca i dodatnie. Korzystamy ze wzoru ① Jeśli g jest nierosnąca to $t \longmapsto g(a)-g(t)$ jest niemalejąca i dodatnie i korzystamy z ②

$$\int\limits_{[a,b]} f(g(b)-g) = (g(b)-g(a)) \int\limits_{[a,\xi]} f$$

$$g(b)\int\limits_{[a,b]} f - \int\limits_{[a,b]} fg = g(b)\int\limits_{[a,\xi]} f - g(a)\int\limits_{[a,\xi]} f$$

$$g(b)\int\limits_{[\xi,b]} f + g(a)\int\limits_{[a,\xi]} f = \int\limits_{[a,b]} fg$$

$$\int\limits_{[a,b]} f(g(a)-g) = (g(a)-g(b)) \int\limits_{[\xi,b]} f$$

$$g(a)\int\limits_{[a,b]} f - \int\limits_{[a,b]} fg = g(a)\int\limits_{[\xi,b]} f - g(b)\int\limits_{[\xi,b]} f$$

$$g(a)\int\limits_{[a,\xi]} f + g(b)\int\limits_{[\xi,b]} f = \int\limits_{[a,b]} fg$$

$\blacksquare$

UWAGA: Wzory ① i ② noszą nazwę Drugie twierdzenie o wartości średniej dla całki.