WYKŁAD 2

LICZBY RZECZYWISTE

Na tym wykładzie liczby naturalne $\mathbb{N}$ będziemy uważali za dane przez Boga. Liczby całkowite skonstruowaliśmy, liczby wymierne mam nadzieję, że ktoś z Państwa skonstruował. Pozostają nam liczby rzeczywiste. Też je można skonstruować, na przynajmniej dwa sposoby. My podejdziemy jednak do sprawy inaczej – znowu zrobimy to aksjomatycznie. Zanim jednak zabierzemy się do aksjomatycznej teorii $\mathbb{R}$ wrócimy jeszcze do jednej istotnej własności zbioru liczb naturalnych.

ZASADA INDUKCJI

Jeśli T jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ spełniającym warunki:
(1) $1 \in T$, (2) $\forall n \in \mathbb{N}: n \in T \Rightarrow n+1 \in T$ to $T = \mathbb{N}$.

Ponieważ nie definiujemy $\mathbb{N}$, zasady indukcji nie będziemy dowodzić. Wykorzystamy ją zato do dowodzenie innych twierdzeń.

PRZYKŁAD BARDZO ŁATWY

Udowodnić indukcyjnie, że $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $(*)$

$T = \{ n \in \mathbb{N} : * \text{ zachodzi} \}$

(i) Sprawdzamy że $1 \in T$, tzn $*$ zachodzi dla $n=1$: lewa strona $1\cdot 2 = 2$, prawe $\frac{1}{3}\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$.

(ii) załóżmy że $*$ zachodzi dla n, sprawdzamy co dla $n+1$:
$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \left(\frac{1}{3} n + 1\right)(n+1)(n+2)$
$= \frac{1}{3}(n+3)(n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$ tzn $*$ zachodzi dla $n+1$

z założenia $n \in T$ wynika $n+1 \in T$. Na mocy zasady indukcji $T = \mathbb{N}$, czyli $*$ zachodzi dla każdego n. $\square$

PRZYKŁAD WAŻNY.

Korzystając z ZI można udowodnić inną ważną własność zbioru liczb naturalnych, mianowicie ZASADĘ MINIMUM: Każdy niepusty podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy. Zasadę minimum udowodnić można korzystając z Z.I.

e.a. Załóżmy, że X jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$, który nie ma elementu najmniejszego. Oznaczmy

$$T = \{ n \in \mathbb{N} : \forall\, k \in X \;\; n < k \} = \{ n \in \mathbb{N} : n < X \}$$

Pokażemy, że $T = \mathbb{N}$, czyli $X = \emptyset$. (i) 1 jest najmniejszym elementem $\mathbb{N}$

zatem jeśli $1 \in X$ to 1 jest najmniejszym elementem X – sprzeczność – wobec tego $1 \in T$. (ii) Załóżmy, że $n \in T$. Oznacza to, że $\forall k \in X \;\; k > n$. Wtedy także $k > n+1$, bo jeśli nie, to $n+1 \in X$ i $n+1$ jest najmniejszym elementem X. $\square$

Posługując się zasadą minimum można udowodnić, że każda liczba naturalna jest ciekawa. Istotnie: załóżmy że zbiór liczb nieciekawych $K \subset \mathbb{N}$ jest niepusty. Oznacza to, że ma element najmniejszy. Ale czy najmniejsza nieciekawa liczba naturalna nie jest ciekawa?

LICZBY RZECZYWISTE Wymienimy i omówimy teraz własności $\mathbb{R}$ sformułowane w postaci aksjomatów

① $\mathbb{R}$ jest ciałem po zajęciach z Algebry $\mathbb{R}$ nie ma już za bardzo nad czym dyskutować $(\mathbb{R}, \cdot, +, 0, 1)$ $+, \cdot$ działanie przemienne $(\mathbb{R}, +, 0)$ jest grupą $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ jest grupą, $1 \neq 0$, rozdzielność mnożenia względem dodawania i.e. $x(y+z) = xy + xz$.

② $\mathbb{R}$ jest ciałem uporządkowanym liniowo tzn istnieje wyróżniony podzbiór $\mathbb{R}_+$ mający następujące własności $\mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \emptyset$, $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup (-\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (x+y \in \mathbb{R}_+$ i $x \cdot y \in \mathbb{R}_+)$. Wyróżnienie tego zbioru pozwala wprowadzić relację „$<$" i „$\leq$"

$$x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$$
$$x \leq y \iff x < y \text{ lub } x = y$$

ta relacja ma następujące własności:

(1) jest antysymetryczna tzn $(x \leq y$ i $y \leq x) \Rightarrow x = y$

(2) jest przechodnia $(x \leq y$ i $y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$

(3) $\forall x y \;\; x \leq y$ lub $y \leq x$

relacja częściowego porządku

relacja liniowego porządku

③ Aksjomat Archimedesa

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n \in \mathbb{N} : \;\; x < ny$$

Idąc krokami o ustalonej długości możemy dojść dowolnie daleko

④ **Aksjomat zupełności** Niech $(x_n), (y_n)$ będą dwoma ciągami o następujących własnościach: (x_n) jest rosnący, (y_n) jest malejący

$$\forall_n \ x_{n+1} \geq x_n \qquad\qquad \forall_n \ y_{n+1} \leq y_n$$

oraz $\forall_n \ x_n \leq y_n$. Istnieje $r \in \mathbb{R} : \forall_n \ x_n \leq r \leq y_n$

TWIERDZENIE (Zostawiamy bez dowodu) Zbiór spełniający powyższe aksjomaty jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu. Tzn. jeśli istnieje $\mathbb{K}$ spełniające ①-④ to istnieje bijekcja $\varphi: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ zachowująca działania i porządek.

UWAGA: $\mathbb{Q}$ spełnia wszystko z wyjątkiem zupełności

PRZYKŁADY UŻYCIA AKSJOMATÓW:

(1) Wykazać prawo skracania, tzn

$$a \geq b \implies \forall x \in \mathbb{R} \quad a+x \geq b+x$$

DOWÓD: $a \geq b$ oznacza, że $a=b$ lub $a>b$.

$a=b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow (a-b)+(x-x)=0 \Rightarrow (a+x)-(b+x)=0 \Rightarrow a+x=b+x$

$a>b \Rightarrow a-b \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (a-b)+(x-x) \in \mathbb{R}_+$, $(a-b)+(x-x) = (a+x)-(b+x)$ zatem

$(a+x)-(b+x) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (a+x) > (b+x)$

(2) Jeśli $x,y \in \mathbb{R}$ i $x<y$ to $\exists q \in \mathbb{Q}: \quad x<q<y$

DOWÓD: $x<y \Rightarrow y-x \in \mathbb{R}_+$. Istnieje m: $\quad m(y-x)>1$ tzn $my > mx+1$

W odcinku $[mx, mx+1]$ jest przynajmniej jedna liczba całkowita: istotnie, załóżmy najpierw $x>0$. To oznacza zbiór liczb naturalnych większych niż mx. Zbiór ten jest niepusty gdyż (Archimedes) $\exists m: \ m \cdot 1 > m \cdot x$. T ma element najmniejszy, oznaczamy go M. Wtedy

$$M-1 \leq mx < M \Rightarrow M \leq mx+1$$

$$mx < M \leq mx+1 < my \qquad x < \overset{q}{\frac{M}{m}} < y$$

Gdy $x<0$ bierzemy $T = \{m \in \mathbb{N}: m > -mx\}$ i dalej podobnie. Dla $x=0$ mamy $my>1$ i $0<1<my \Rightarrow 0<\frac{1}{n}<y$. ■

KRESY PODZBIORÓW $\mathbb{R}$. Niech $X \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że X jest ograniczony z góry jeśli $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in X \ \ x \leq M$. Mówimy że X jest ograniczony z dołu jeśli $\exists m \in \mathbb{R}: \forall x \in X \ \ x \geq m$. Zbiór ograniczony z góry i z dołu nazywa się ograniczony. Liczby $M: \forall x \in X \ \ x \leq M$ nazywamy ograniczeniami górnymi a $m: \forall x \in X \ \ x \geq m$ ograniczeniami górnymi.

$\sup X$ (SUPREMUM)

Kresem górnym zbioru ograniczonego z góry nazywamy najmniejsze ograniczenie górne tego zbioru.

$$M = \sup X \iff \left(M' \text{ jest ograniczeniem górnym } X \Rightarrow M \leq M' \right)$$

$\inf X$ (INFIMUM)

Kresem dolnym zbioru ograniczonego z dołu nazywamy największe ograniczenie dolne tego zbioru

Definicje powyższe nie gwarantują istnienia kresów. Jest to temat specjalnego twierdzenia:

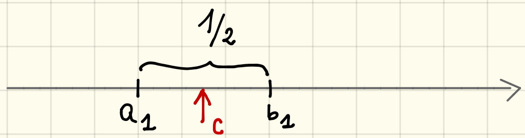
TWIERDZENIE Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres górny. Każdy niepusty, ograniczony z dołu zbiór ma kres dolny.

DOWÓD: (dla supremum)

Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry. Wybierzmy $x_0 \in X$. Z aksjomatu Archimedesa wnioskujemy że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $x_0 + k \cdot \frac{1}{2}$ jest ograniczeniem górnym X. W zbiorze $k \in \mathbb{N}$ spełniających ten warunek istnieje element najmniejszy. Oznaczmy go k_0. Mamy wtedy

$$a_1 = x_0 + (k_0 - 1) \cdot \frac{1}{2} \qquad b_1 = x_0 + k_0 \frac{1}{2}$$

nie jest ograniczeniem górnym — ograniczenie górne



Pomiędzy a_1 i b_1 wstawiamy w środek $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Sprawdzamy czy c_1 jest ograniczeniem górnym.

TAK

$a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$

NIE

$a_2 = c_1$ $b_2 = b_1$

$a_2 < b_2$ $a_1 \leq a_2$, $b_2 \leq b_1$

$b_2 - a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

Podobnie $c_2 = \frac{a_2+b_2}{c_2}$ i konstruujemy a_3, b_3

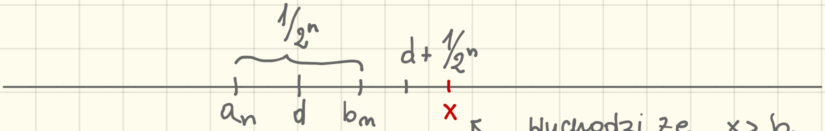
$b_3 - a_3 = \frac{1}{8}$, $a_3 < b_3$ a_3 nie jest, b_3 jest ograniczeniem górnym

$a_2 \leq a_3$ $b_3 \leq b_2$

i.t.d .... Konstruujemy dwa ciągi (a_n), (b_m) :
$a_n < b_m$, $b_m - a_n = 1/2^n$, (a_n) rosnący, (b_m) malejący. Z aksjomatu zupełności wynika, że $\exists\, d \in \mathbb{R}$ takie, że $a_n \leq d \leq b_m$. Wykażemy że d jest kresem górnym zbioru X. Zaczniemy od wykazania, że d jest ograniczeniem górnym zbioru X.

a a

Załóżmy, że d nie jest ograniczeniem górnym, tzn $\exists\, x \in X : x > d$, tzn $(x-d) > 0$. Istnieje zatem n: $2^n(x-d) > 1$ $x - d > \frac{1}{2^n}$ $x > d + \frac{1}{2^n}$



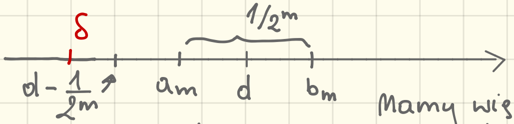
Wychodzi, że $x > b_m$ co jest sprzeczne z definicją b_m.

Teraz wykażemy, że d jest najmniejszym ograniczeniem górnym.

e.a.

Załóżmy, że $\delta < d$ i δ jest ograniczeniem górnym X. $\delta < d$ tzn $d - \delta > 0$ i istnieje m: $2^m(d-\delta) > 1$ $d - \delta > \frac{1}{2^m}$ $d > \delta + \frac{1}{2^m}$

$d - \frac{1}{2^m} > \delta$



Mamy więc $\delta < d - \frac{1}{2^m} < a_m$ i a_m nie jest ograniczeniem górnym — sprzeczność. ■

KONWENCJE:

$X \neq \emptyset$ i X nieograniczony z góry: $\sup X = +\infty$

$X \neq \emptyset$ i X nieograniczony z dołu: $\inf X = -\infty$

$\sup \emptyset = -\infty$

$\inf \emptyset = +\infty$

⑤ Przekroje Dedekinda