# WYKŁAD 3

## CIĄGI

Granica ciągu, granica górna i dolna, twierdzenie o zbieżności

liczba e, funkcja exp

Ciągiem o wyrazach w $X$ nazywamy odwzorowanie $x: \mathbb{N} \to X$. Zamiast $x(n)$ piszemy $x_n$. Zamiast $x: \mathbb{N} \to X$ piszemy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ albo po prostu $(x_n)$. W dalszym ciągu mówimy o ciągach o wyrazach w $\mathbb{R}$, czyli o ciągach liczb rzeczywistych.

Mówimy że ciąg jest ograniczony jeśli zbiór jego wyrazów $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ jest ograniczony. Można też powiedzieć ciąg ograniczony z dołu lub z góry. Określenie te odnoszą się do zbioru wyrazów.

Mówimy że ciąg jest malejący jeśli $\forall n \ x_{n+1} \leqslant x_n$, rosnący jeśli $\forall n \ x_{n+1} \geqslant x_n$. Używamy określeń ściśle malejący lub ściśle rosnący jeśli nierówności są ostre. Ciągi rosnące i malejące określamy wspólnie jako monotoniczne.

**DEFINICJA:** Granicą ciągu $(x_n)$ nazywamy liczbę $g$ spełniającą warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |x_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy $\lim_{n\to\infty} x_n = g$. Mówiąc mniej formalnie, dla każdego $\varepsilon > 0$ w odcinku $]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$ leżą $\boxed{\text{prawie wszystkie}}$ wyrazy ciągu $(x_n)$

wszystkie poza skończoną liczbą

Ciąg, który ma granicę nazywamy zbieżnym. Używamy także oznaczeń

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ \ x_n > M \qquad\qquad \forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ \ x_n < M$$

**STWIERDZENIE** Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę

**DOWÓD** Ciąg jest zbieżny, tzn ma granicę. Oznaczamy ciąg $(x_n)$ a granicę $g$. Załóżmy, że $g'$ też jest granicą $(x_n)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy $N$ i $N'$ takie że dla $n > N$ $|x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i dla $n > N'$ $|x_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Biorąc teraz $n > \max\{N, N'\}$ mamy

$$|g-g'| = |g - x_n + x_n - g'| \leqslant |g - x_n| + |x_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{czyli} \quad |g-g'| < \varepsilon.$$

Pamiętamy, że $\varepsilon$ jest dowolne, w szczególności dowolnie małe. Różnica $g$ i $g'$ jest więc mniejsza od każdej liczby dodatniej. Musi więc być $g-g'=0$, $g=g'$ ■

Większość pracy będzie teraz polegała na sprawdzaniu zbieżności i poszukiwaniu granic ciągów.

PRZYKŁAD: Zbadajmy zbieżność ciągu $x_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$. Jest jasne, że zawsze $x_n \geq 0$. Zróbmy następujący rachunek:

$$x_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\underset{n>1}{\leq}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

$$|x_n-\underset{\text{hipotetyczne granica}}{0}|\leq\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \longleftarrow$$ czy dla dowolnego $\varepsilon$ znajdziemy $N$ takie że dla $n>N$ $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}<\varepsilon$ ? oczywiście. Dla ustalonego $\varepsilon>0$ liczymy

$$\frac{1}{n^2-1}<\varepsilon^2 \iff 1<\varepsilon^2(n^2-1) \iff \frac{1}{\varepsilon^2}<n^2-1 \iff \frac{1}{\varepsilon^2}+1<n^2 \iff \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}<n^2$$

$\iff \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}<n$ tzn jeśli $\varepsilon\geq 1$ to $n$ może być dowolne $>1$ czyli $N=1$ a jeśli $\varepsilon<1$ to $N>\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$. Wiadomo, że takie $N$ istnieje. Wniosek $\lim_{n\to\infty}x_n=0$

Przykład prosty, dowód długi... Przydadzą się kilka twierdzeń ułatwiających życie. W dalszym ciągu udowodnimy pewną ilość przydatnych twierdzeń:

STWIERDZENIE 1. Ciąg zbieżny jest ograniczony.

DOWÓD: Ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy $N$: dla $n>N$ $|x_n-g|<\varepsilon$. Wtedy prawie wszystkie (poza, być może $x_1, x_2, \dots, x_N$) wyrazy ciągu $(x_n)$ są w odcinku $]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$. Oznaczamy $m=\min\{x_1, x_2, \dots, x_N, g-\varepsilon\}$ $M=\max\{x_1, x_2, \dots x_N, g+\varepsilon\}$ wtedy zbiór wyrazów ciągu zawiera się w odcinku $[m, M]$. ■

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: $x_n=(-1)^n$ jest ograniczony, ale nie jest zbieżny.

TWIERDZENIE 2 Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

DOWÓD:

Dowodzimy dla ciągów rosnących. Niech $X=\{x_1, x_2, \dots\}$ $g=\sup X$. W szczegól-

ności oznacza to, że $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq g$. Udowodnimy, że $g$ jest granicą $(x_n)$. Dowód a a
założmy, że $g$ nie jest granicą. Prawdziwe jest więc zdanie 

$$\sim\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n > N\quad |g - x_n| < \varepsilon\right)$$

$$\equiv$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \underbrace{\forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n > N}_{\text{istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu } (x_n)}\quad |g - x_n| \geq \varepsilon$$

Całe to zdanie po ludzku: Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że poza odcinkiem $]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Z założenia $g \geq x_n$ zatem tak naprawdę nieskończenie wiele wyrazów ciągu jest w przedziale $]-\infty, g-\varepsilon]$. Pamiętamy ponadto, że ciąg jest rosnący. Jeśli więc $x_m > g - \varepsilon$ to także wszystkie $x_n > g - \varepsilon$ dla $n > m$. Oznacza to, że w odcinku $]-\infty, g-\varepsilon]$ są wszystkie wyrazy ciągu $(x_n)$, tzn $X \subset ]-\infty, g-\varepsilon]$. Ale wtedy $\sup X < g \longrightarrow$ sprzeczność. $g$ jest więc granicą $(x_n)$

**PRZYKŁAD:** Ciąg $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony. Istotnie

$$\boxed{\frac{x_{n+1}}{x_n}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right]^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[\frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right]^{n+1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left[1 + \frac{\frac{n-n-1}{n(n+1)}}{1 + \frac{1}{n}}\right]^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 - \frac{1/n(n+1)}{\left(1 + 1/n\right)}\right]^{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 - \cancel{(n+1)}\, \frac{1/n\,\cancel{(n+1)}}{1 + 1/n}\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \boxed{1} \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \implies x_{n+1} \geq x_n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{(n-1)\cancel{n}}{2!\, n^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{(n-2)(n-1)\cancel{n}}{3!\, n^{\cancel{3}\,2}} + \dots + \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots\cancel{n}}{k!\, n^{\cancel{k}\ k-1}} + \dots + \frac{\cancel{n!}\ (n-1)!}{n!\, n^{\cancel{n}\ n-1}} \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3$$

Drugie przydatne twierdzenie dotyczące ciągów to:

**TWIERDZENIE** (o trzech ciągach)

Niech $(x_n), (y_n), (z_n)$ będą ciągami takimi, że $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n \leq z_n$.
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = g$, to także $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$

**DOWÓD**: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i znajdźmy $N_x$ i $N_z \in \mathbb{N}$ takie, że dla $x > N_x$ $|x_n - g| < \varepsilon$, dla $n > N_z$ $|z_n - g| < \varepsilon$. Inaczej zapiszemy

$$x_n \in \,]g-\varepsilon, g+\varepsilon[ \implies g - \varepsilon < x_n$$

$$z_n \in \,]g-\varepsilon, g+\varepsilon[ \implies z_n < g + \varepsilon$$

Weźmy teraz $n > \max\{N_x, N_z$

$$g - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < g + \varepsilon \implies |y_n - g| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} y_n = g \quad \blacksquare$$

**PRZYKŁAD**:

$x_n = \sqrt[n]{n}$ weźmy $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad a_n + 1 = \sqrt[n]{n} \quad n = (1+a_n)^n$

$$n = (1+a_n)^2 = 1 + na_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \dots \geq 1 + na_n + \binom{n}{2} a_n^2$$

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$$\frac{2}{n} \geq a_n^2 \qquad 0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \qquad \lim a_n = 0$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

**STWIERDZENIE** (Operacje na ciągach zbieżnych)

$(x_n), (y_n)$ zbieżne, $\lim x_n = g \quad \lim y_n = h$

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha g + \beta h$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = gh$

(iii) Jeśli $y_n \neq 0$ i $h \neq 0$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{g}{h}$

**DOWÓD**:

(i) $|\alpha x_n + \beta y_n - \alpha g - \beta h| \leq |\alpha||x_n - g| + |\beta||y_n - h|$ Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy $n$ takie, że $|x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ i $|y_n - g| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ wtedy

$$|\alpha x_n + \beta y_n - \alpha g - \beta h| \leq |\alpha||x_n - g| + |\beta||y_n - h| \leq |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

(ii) $|x_n y_n - gh| = |x_n y_n - g y_n + g y_n - gh| \leq |x_n - g||y_n| + |g||y_n - h| \leq^*$

Ciąg $(y_n)$ jest zbieżny, więc ograniczony. Mamy $|y_n| \leq M$

$N_x: \forall n > N_x \ |x_n - g| < \varepsilon/M2$ $\quad N_y: \forall n > N_y \ |y_n - h| < \frac{\varepsilon}{2|g|}$

dla $n > \max\{N_x, N_y\}$

$$* \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + g\frac{\varepsilon}{2g} = \varepsilon$$

(iii) $$\frac{x_n}{y_n} - \frac{g}{h} = \frac{h x_n - g y_n}{h y_n} = \frac{h x_n - gh + gh - g y_n}{h y_n} = \frac{h(x_n - g) + g(h - y_n)}{h y_n}$$

Ciąg $(y_n)$ jest zbieżny do liczby różnej od zera. Wobec tego istnieje $N$ takie, że dla $n > N$ $|y_n| > \frac{h}{2}$. Ponadto ustalamy $\varepsilon > 0$ i bierzemy $N_x$: dla $n > N_x$ $|x_n - g| < \frac{\varepsilon h}{4}$, $N_y$: dla $n > N_y$ $|h - y_n| < \frac{h^2}{4g}\varepsilon$

wtedy dla $n > \max\{N, N_x, N_y\}$

$$\leq \frac{h \cdot \frac{\varepsilon h}{4} + \cancel{g} \cdot \frac{h^2}{4\cancel{g}}\varepsilon}{h^2/2} = \frac{\varepsilon\,\frac{h^2}{2}}{h^2/2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Ciągi Cauchy'ego o których mowa będzie za chwilę odgrywają ważną w matematyce rolę zarówno od strony praktycznej jak i teoretycznej.

DEFINICJA

Niech $(x_n)$ będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że $(x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall m, n > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

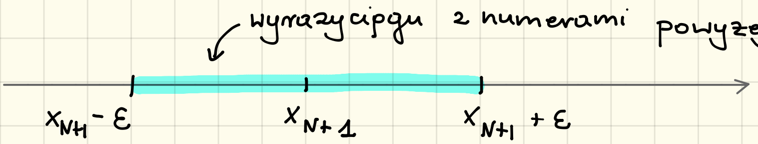
TWIERDZENIE W $\mathbb{R}$ ciąg spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny

DOWÓD: $\Leftarrow$ Załóżmy, że $(x_n)$ jest zbieżny do $g$. Ustalmy $\varepsilon>0$ i znajdźmy $N$ takie, że dla $n>N$ $|x_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}$. Weźmy $n,m>N$
$$|x_n-x_m|=|x_n-g+g-x_m|\leq|x_n-g|+|x_m-g|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Dowód w drugą stronę jest trudniejszy. Żeby zrozumieć dlaczego, wystarczy zauważyć, że w ciele $\mathbb{Q}$ twierdzenie w tę stronę nie zachodzi. Różnica polega więc na zupełności. Najpierw zauważmy, że ciąg Cauchy'ego jest ograniczony. Istotnie: ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy $N$ jak w warunku Cauchy'ego. Wtedy dla $m,n>N$ $|x_m-x_n|<\varepsilon$. W szczególności $\forall m>N$ $|x_{N+1}-x_m|<\varepsilon$. Wszyskie wyrazy ciągu z indeksami większymi niż $N$ są w odcinku $]x_{N+1}-\varepsilon, x_{N+1}+\varepsilon[$. Weźmy

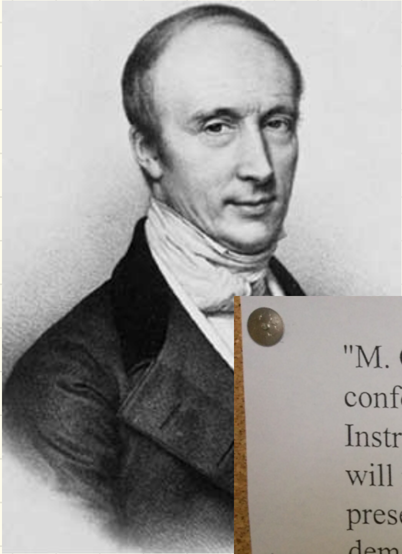
$$m=\min\{x_1,\dots,x_N,x_{N+1}-\varepsilon\}$$
$$M=\max\{x_1,\dots,x_N,x_{N+1}+\varepsilon\}\qquad \{x_1,\dots,x_N\dots\}\subset[m,M]$$

Zdefiniujmy teraz dwa ciągi $m_n=\inf\{x_n,x_{n+1},\dots\}$, $M_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\dots\}$. Oczywiście $m_n\leq M_n$ oraz $m_n$ rosnący a $M_n$ malejący. Z aksjomatu 4 istnieje $m_n\leq g\leq M_n$.
Pokażemy, że jest jedyne: Znowu ustalmy $\varepsilon>0$ i $N$ jak w w. C.

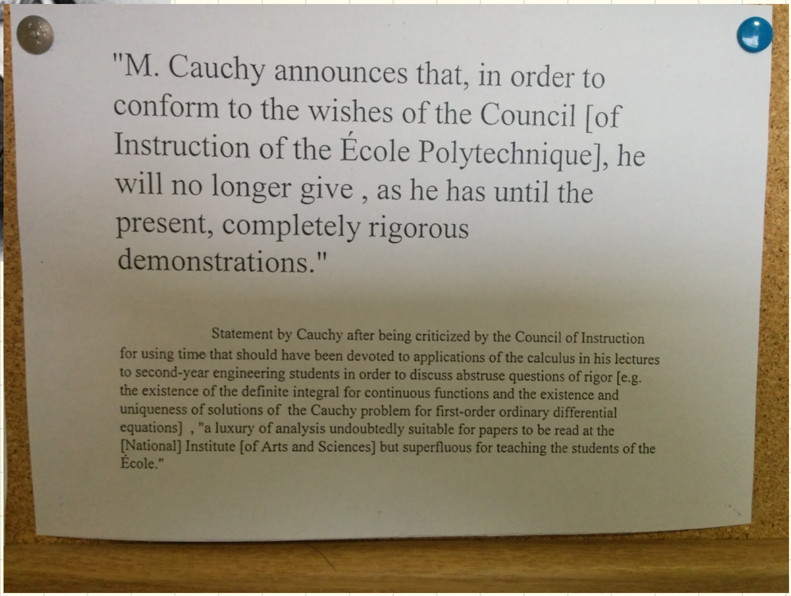



$$\{x_{N+1},x_{N+2},\dots\}\subset\,]x_{N+1}-\varepsilon,\ x_{N+1}+\varepsilon[$$
$$\Downarrow$$
$$m_{N+1}\geq x_{N+1}-\varepsilon$$
$$M_{N+1}\leq x_{N+1}+\varepsilon\qquad |m_{N+1}-M_{N+1}|\leq 2\varepsilon$$

Możemy znaleźć $N$ takie, że $m_{N+1}$ i $M_{N+1}$ różnią się o dowolnie małą liczbę. Wobec tego $g$ jest jedno i $g=\lim m_n=\lim M_n$. ∎



Baron Augustin-Louis Cauchy
1789–1857 Francja



"M. Cauchy announces that, in order to conform to the wishes of the Council [of Instruction of the École Polytechnique], he will no longer give , as he has until the present, completely rigorous demonstrations."

Statement by Cauchy after being criticized by the Council of Instruction for using time that should have been devoted to applications of the calculus in his lectures to second-year engineering students in order to discuss abstruse questions of rigor [e.g. the existence of the definite integral for continuous functions and the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for first-order ordinary differential equations] , "a luxury of analysis undoubtedly suitable for papers to be read at the [National] Institute [of Arts and Sciences] but superfluous for teaching the students of the École."

## LIMES SUPERIOR, LIMES INFERIOR

(Janusz Zajdel)

**DEFINICJA** Niech $(x_n)$ będzie ciągiem rzeczywistym. Oznaczmy
$X_n = \{x_i : i \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

$$M_n = \sup X_n, \quad m_n = \inf X_n \qquad M_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad m_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\limsup x_n = \inf\{M_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \liminf x_n = \sup\{m_n : n \in \mathbb{R}\}$$

lim sup i lim inf istnieją dla każdego ciągu, mogą być nieskończone

PRZYKŁAD: $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$x_1 = 0$ $\quad M_1 = \frac{3}{2}$ $\quad m_1 = -1$

$x_2 = 3/2$ $\quad M_2 = 3/2$ $\quad m_2 = -1$

$x_3 = -2/3$ $\quad M_3 = 5/4$ $\quad m_3 = -1$

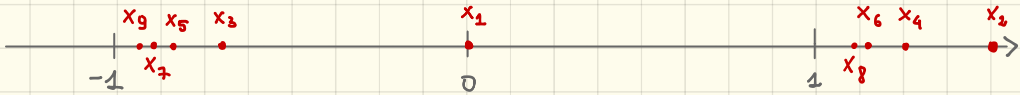
$x_4 = 5/4$ $\quad M_4 = 5/4$ $\quad \vdots$

$x_5 = -4/5$ $\quad M_5 = 7/6$

$x_6 = 7/6$ $\quad M_6 = 7/6$

$x_7 = -6/7$ $\quad M_7 = 9/8$

$\vdots \qquad \vdots$




$$\limsup \left( (-1)^n + \frac{1}{n} \right) = 1 \qquad \liminf \left( (-1)^n + \frac{1}{n} \right) = -1$$

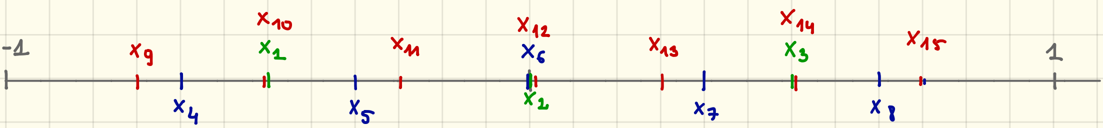
PRZYKŁAD (*) $x_n = \dfrac{n}{1+E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$ $\qquad \liminf x_n = -1 \qquad \limsup x_n = 1$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | ... | $n$ |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | ... | $k$ |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | ... | $l$ |

$n = k^2 + l \qquad k \in \mathbb{N}, \quad l \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$

$E(\sqrt{n}) = k$

$$x_n = \frac{k^2+l}{1+k} - k = \frac{k^2 - k - k^2 + l}{1+k} = \frac{l-k}{1+k}$$




$k=1, \ l = 0,1,2 \qquad x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \frac{1}{2}$

$k=2 \quad l = 0,1 .. 4 \qquad x_4 = -\frac{2}{3} \qquad x_5 = -\frac{1}{3} \qquad x_6 = 0 \qquad x_7 = +\frac{1}{3} \qquad x_8 = \frac{2}{3}$

$k=3 \quad l = 0, .., 6 \qquad x_9 = -\frac{3}{4} \qquad x_{10} = -\frac{2}{4} \qquad x_{11} = -\frac{1}{4} \qquad x_{12} = 0 \qquad x_{13} = \frac{1}{4} \qquad x_{15} = \frac{2}{4} \quad \ldots$

**DEFINICJA** **Punktem skupienia** ciągu $(x_n)$ nazywamy liczbę $h \in \mathbb{R}$ taką, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ w odcinku $]h-\varepsilon, h+\varepsilon[$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. $\forall \varepsilon>0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ |h - x_n| < \varepsilon$

$\left(\forall \varepsilon>0 \ \exists^* n \in \mathbb{N} \ |x_n - h| < \varepsilon\right)$

$+\infty$ jest punktem skupienia ciągów nieograniczonych z góry
$-\infty$ ..... z dołu

Granica, jeśli istnieje, jest (jedynym) punktem skupienia ciągu. Ciąg $n \mapsto (-1)^n + \frac{1}{n}$ ma dwa punkty skupienia. Ile punktów skupienia ma ciąg z przykładu (*)?

Niech $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie odwzorowaniem ściśle rosnącym. Zamiast $k(n)$ piszemy $k_n$. **Podciągiem** ciągu $(x_n)$ nazywamy ciąg $(y_n)$ dany wzorem $y_n = x_{k_n}$. Podciąg zawiera niektóre wyrazy ciągu, nieskończenie wiele, w takim porządku w jakim występowały w wyjściowym ciągu.

**STWIERDZENIE:** Punkt skupienia ciągu jest granicą pewnego podciągu.

**DOWÓD:** Niech $r \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia ciągu $(x_n)$. Z definicji punktu skupienia wynika, że w odcinku $]r-1, r+1[$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybieramy dowolny wyraz spośród zawartych w tym odcinku: $x_{k_1}$ będzie on pierwszym wyrazem podciągu. Następnie zmniejszamy odcinek: $]r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}[$. W tym odcinku jest też nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybieramy jeden z nich: $x_{k_2}$ dbając, żeby $k_2 > k_1$. Następnie ponownie zmniejszamy odcinek: $]r-\frac{1}{3}, r+\frac{1}{3}[$ i wybieramy $x_{k_3}$, $k_3 > k_2$. W ten sposób konstruujemy podciąg $(x_{k_n})$ ciągu $(x_n)$. Wiadomo, że $x_{k_n} \in ]r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n}[$ zatem $|x_{k_n} - r| < \frac{1}{n}$, co pokazuje, że $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = r$. ∎

**STWIERDZENIE** Granica górna ciągu jest kresem górnym zbioru punktów skupienia tego ciągu. Granica dolna jest kresem dolnym zbioru punktów skupienia ciągu.

**SZKIC DOWODU** Kompletny dowód jest nietrudny ale żmudny. Zrobimy zatem tylko tylko szkic. Rozpatrzymy przypadek ciągu takiego, że $\limsup x_n = c$ i $c \in \mathbb{R}$, tzn jest to liczba skończona. Pokażemy, że $c$ jest punktem skupienia $(x_n)$ i że nie ma większych punktów skupienia.

$$c = \limsup x_n = \inf_n \underbrace{\sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}_{M_n}^{=X_n}$$

Skoro $c = \inf\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ to znaczy, że $\forall n \ M_n \geq c$ i $(M_n)$ jest malejący. Jest to ciąg malejący i ograniczony z dołu, a więc zbieżny. Z dowodu stosownego twierdzenia wynika, że

$c = \lim M_n$. Z definicji granicy znajdziemy dla każdego $\varepsilon > 0$ takie $N_\varepsilon$, że dla $n > N_\varepsilon$ $M_n \in [c, c+\varepsilon[$. Zacznijmy od $\varepsilon = 1$ i wyznaczmy $N_1$, tzn $M_{N_1+1} \in [c, c+\varepsilon[$. $M_{N_1+1} = \sup\{x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots\}$, tzn istnieje $x_{N_1+k}$ taki, że $x_{N_1+k} \in ]M_{N_1+1} - 1, M_{N_1+1}]$. Ostatecznie $x_{N_1+k} \in ]c-1, c+1[$. Zaczynamy definiować ciąg $(\varphi_n)$ o wartościach w $\mathbb{N}$ i rosnący kładąc $\varphi_1 = N_1 + k$

Dalej bierzemy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i powtarzamy procedurę dbając by $N_2 > N_1 + k$. Otrzymujemy $x_{N_2+k_2} \in ]c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}[$ i $\varphi_2 = N_2 + k_2$.

Podobnie dla $\varepsilon = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Z konstrukcji widać, że $(x_{\varphi_n})$ jest zbieżny do $c$, więc $c$ jest punktem skupienia $(x_n)$. Pozostaje pokazać, że nie ma większego punktu skupienia. Załóżmy, że jest: $c' > c$ wtedy istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)$ większych od $\frac{c'+c}{2}$. I jednocześnie istnieje $N$ takie, że dla $n > N$ $M_n \in [c, \frac{c+c'}{2}[$, czyli $x_n \in ]-\infty, \frac{c+c'}{2}[$ zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od $\frac{c+c'}{2}$ $\longrightarrow$ sprzeczność.

Otto Stolz
1842 (Hall in Tirol)
1905 (Wiedeń)

## TWIERDZENIE STOLZA

$(x_n), (y_n)$ są ciągami rzeczywistymi, $(y_n)$ jest od pewnego miejsca rosnący oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$ to istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ i obie granice są równe.

DOWÓD: Zanim przejdziemy do właściwego dowodu, zauważmy że jeśli dla $i \in \{1, \dots, N\}$, $v_i > 0$ $\frac{u_i}{v_i} \in [a,b]$, to także $\frac{\sum u_i}{\sum v_i} \in [a,b]$

istotnie $a \leq \frac{u_i}{v_i} \leq b \Rightarrow a v_i \leq u_i \leq b v_i \Rightarrow \sum_i a v_i \leq \sum_i u_i \leq \sum_i b v_i$

$\Rightarrow a \sum v_i \leq \sum u_i \leq b \sum v_i \Rightarrow a \leq \frac{\sum u_i}{\sum v_i} \leq b$. 31

I Rozważmy teraz przypadek gdy $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \xrightarrow{n\to\infty} a$ $a \in \mathbb{R}$

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ i wystarczająco dużego $n$ $(n \geq N)$ mamy

$$a - \varepsilon/2 \leq \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leq a + \varepsilon$$

zachodzi więc dla

$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \dots, \frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}$, stosujemy początkową obserwację

i dostajemy

$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N} < a + \frac{\varepsilon}{2}$ tzn $\left|\frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

My jednak musimy szacować $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right|$:

$$\left(\frac{x_n}{y_n} - a\right) = \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right)\frac{y_n - y_N}{y_n} + \frac{x_N}{y_n} - a\frac{y_N}{y_m}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leq \underbrace{\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\left|\frac{y_n - y_N}{y_n}\right|}_{\downarrow < 1} + \underbrace{\underbrace{\left|\frac{x_N}{y_n}\right|}_{\downarrow 0} + |a| \underbrace{\left|\frac{y_N}{y_n}\right|}_{\downarrow 0}}_{\text{Bierzemy } n \text{ tak duże żeby te dodatki } < \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

II Rozważamy przypadek $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \longrightarrow +\infty$

Skoro tak to dla wystarczająco dużych $n$ $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 1$. Zatem

$x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0$ Oznacza to, że $(x_m)$ jest rosnący od pewnego miejsca

załóżmy, że ma to miejsce dla $n \geq N$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &> y_{n+1} - y_n \\ x_n - x_{n-1} &> y_n - y_{n-1} \\ &\vdots \\ + \quad x_{N+1} - x_N &> y_{N+1} - y_N \\ \hline x_{n+1} - x_N &> y_m - y_N \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x_{n+1} > y_n + \underbrace{(x_N - y_N)}_{\text{const}}$

Skoro $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ to także $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

Wtedy wersję I można zastosować do $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ bo $(x_n)$ spełnia założenie.

III dla $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ zamieniamy $(x_n)$ na $(-x_n)$ i stosujemy II. ∎

UWAGI: (1) Twierdzenie jest w jedną stronę, tzn z istnienia $\lim \frac{x_n}{y_n}$ nic nie wynika dla $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ np.

$x_n = (-1)^n + 1$

$y_n = n$ $\quad \frac{x_n}{y_n} \longrightarrow 0 \quad \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{n+1-n} = -2(-1)^n$ nie ma granicy

(2) Założenie $y_n \longrightarrow \infty$ jest ważne

$x_n = 1-\frac{1}{n} \quad y_n = 2-\frac{1}{n}$

rosnący ale ograniczony

$$\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1-\frac{1}{n+1}-1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n+1}-2+\frac{1}{n}} = 1$$

(3) Monotoniczność $(y_n)$ jest ważna

$x_n = \sqrt{n} + (-1)^n$

$y_n = \sqrt{n} - (-1)^n$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+(-1)^{n+1}-(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-(-1)^{n+1}+(-1)^n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 2(-1)^n}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + 2(-1)^n} \xrightarrow{n\to\infty} (-1)$$

WNIOSEK Z TW. STOLZA:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1}-x_n) \text{ jeśli granica po prawej istnieje.}$$

WNIOSEK Z TW STOLZA i CIĄGŁOŚCI FUNKCJI log:

Rozważamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Zamiast tego można badać $\lim_{n\to\infty} \log\sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{\log x_n}{n}$

Stosujemy poprzedni wniosek: Jeśli istnieje $\lim(\log x_{n+1} - \log x_n)$ to istnieje $\lim \frac{\log x_n}{n}$ i są równe. Ale $\log x_{n+1} - \log x_n = \log \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Wnioskujemy, że

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} \text{ jeśli granica po prawej stronie istnieje.}$$

# O FUNKCJI exp W/G G.C.


$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

FAKT: (1) Granica $\lim_{n\to\infty} e_n(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$e(x) := \lim_{n\to\infty} e_n(x)$$

(2) $\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad e(x)e(x') = e(x+x')$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e(x) > 0, \quad e(x) > 1+x$

(4) $x \longmapsto e(x)$ jest rosnąca

(5) $e := e(1) \qquad e(p/q) = e^{p/q} \quad p, q \in \mathbb{Z}$

DOWÓD

(1) Pokażemy, że $e_n(x)$ jest od pewnego miejsca rosnący i jest ograniczony

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right]^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1 - \frac{x/n(n+1)}{1+x/n}\right]^{n+1} \underset{\text{DDn}}{\geqslant}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1 - \frac{x/n}{1+x/n}\right] = 1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n} = 1 \qquad \frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} \geqslant 1 \quad e_{n+1}(x) \geqslant e_n(x)$$

$$e_n(x)e_n(-x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

$$e_n(x) \leqslant \frac{1}{e_n(-x)}$$

DDn, tzn dla $n$: $e_n(-x) > 0$

$e_n(-x)$ rosnący $\to \frac{1}{e_n(-x)}$ malejący $\qquad \underset{\text{rosnący}}{e_n(x)} \leqslant \underset{\text{malejący}}{\frac{1}{e_n(-x)}} \quad \to e_n(x)$ ograniczony.

z tw. o ciągach monotonicznych i ograniczonych wynika, że $e_n(x)$ zbieżny dla dowolnego $x$. Oznaczamy $\lim_{n\to\infty} e_n(x) = e(x)$

(2) $x, x' \in \mathbb{R}$ $n$ tak duże, że $1+\frac{x}{n}$, $1+\frac{x'}{n}$, $1+\frac{x+x'}{n}$ dodatnie

$$\frac{e_n(x)e_n(x')}{e_n(x+x')} = \left[\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x'}{n})}{1+\frac{x+x'}{n}}\right]^n = \left[1 + \frac{xx'/n^2}{1+\frac{x+x'}{n}}\right]^n \geq 1 + \frac{xx'/n}{1+\frac{x+x'}{n}}$$

$$\frac{e_n(x+x')}{e_n(x)e_n(x')} = \left[\frac{1+\frac{x+x'}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x'}{n})}\right]^n = \left[1 - \frac{xx'/n^2}{(1+x/n)(1+x'/n)}\right]^n \geq 1 - \frac{xx'/n}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x'}{n})}$$

$$1+\frac{xx'/n}{1+\frac{x+x'}{n}} \leq \frac{e_n(x)e_n(x')}{e_n(x+x')} \leq \frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x'}{n})}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x'}{n}) - \frac{xx'}{n}}$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow n\to\infty$$

$$1 \qquad\qquad \frac{e(x)e(x')}{e(x+x')} \qquad\qquad 1$$

$$e(x)e(x') = e(x+x')$$

(3) $e(x)e(-x) = e(0) = 1$ tzn $e(x) \neq 0$ i $e(-x) \neq 0$ jedna z nich jest dodatnia, iloczyn dodatni, więc obie dodatnie, tzn $\forall x\in\mathbb{R}\ e(x) > 0$

$$e_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n \geq 1+x \quad \Rightarrow \quad e(x) \geq 1+x$$

$$\downarrow$$

$$e(x)$$

(4) $x_1 < x_2$

$$e(x_2) = e(x_2 - x_1 + x_1) = e(x_1)\,e\underbrace{(x_2-x_1)} > e(x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$ tzn $e(x_2-x_1) > 1$

$e()$ jest rosnąca i.e. różnowartościowa

$$e := e(1) = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e(0) = 1$ $\quad k\in\mathbb{N}$ $\quad e(k) = e(1+\dots+1) = e(1)^k = e^k$

$$e(-k) = 1/e(k) = e^{-k}$$

$$e\left(\tfrac{k}{m}\right)\cdots e\left(\tfrac{k}{m}\right) = e(k) = e^k \Rightarrow e(k/m) = e^{k/m}$$

Przynajmniej dla wymiernych $e(p/q) = e^{p/q}$. Dla niewymiernych można to przyjąć za definicję. $e^x = e(x)$. Przy okazji dyskusji ciągłości odwzorowań pokażemy, że $x \longmapsto e(x)$ jest ciągłe.