WYKŁAD 4 (SLAJDY)

Przestrzeń metryczna

PRZESTRZEŃ METRYCZNA

Niech X będzie zbiorem. Metryką na X nazywamy funkcję

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{o własnościach}$$

(1) $d(x,y)=0 \iff x=y$ ← d jest niezdegenerowane

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ ← d jest symetryczne

(3) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ ← nierówność trójkąta

STWIERDZENIE

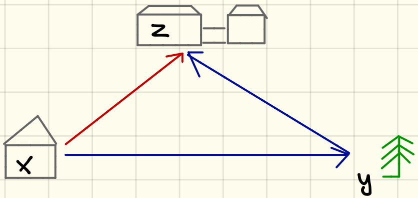
$$d(x,y) \geq 0$$

DOWÓD:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y)+d(x,y) = 2\,d(x,y)$$

$$0 \leq d(x,y)$$

∎



PRZYKŁADY

(1) $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$

(2) X – dowolny, niepusty

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{cases}$$

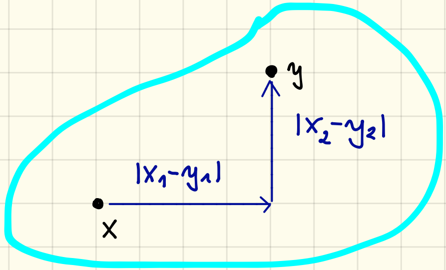
metryka dyskretna

(3) A – dowolny zbiór

X – ograniczone funkcje na A

$$d(f,g)=\sup_A \{ |f(a)-g(a)|$$

TRZY BARDZO WAZNE PRZYKŁADY $X=\mathbb{R}^n$



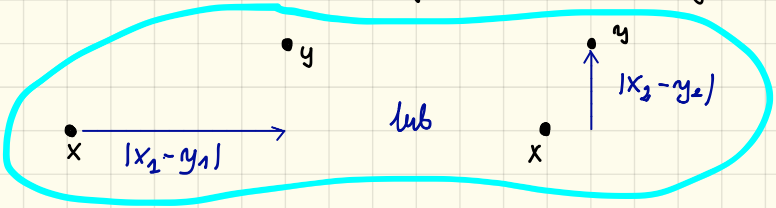
(1) $x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\dots+|x_n-y_n|$

$y=(y_1,\dots,y_n)$

metryka miejska

niezdegenerowanie i symetria są oczywiste, nierówność trójkąta: $d_1(x,z)=|x_1-z_1|+\dots+|x_n-z_n|=$

$=|x_1-y_1+y_1-z_1|+\dots+|x_n-y_n+y_n-z_n|\le|x_1-y_1|+|y_1-z_1|+\dots+|x_n-y_n|+|y_n-z_n|=d(x,y)+d(y,z)$



(2) $d_\infty(x,y)=\sup_{i\in\{1,\dots,n\}}\{|x_i-y_i|\}$

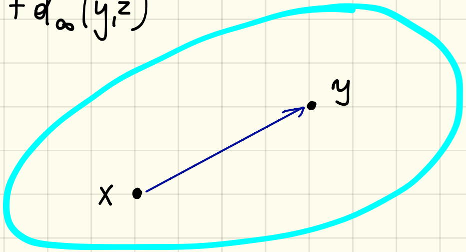
metryka supremum

nierówność trójkąta: niech $d_\infty(x,z)=|x_k-z_k|$ wtedy $d_\infty(x,z)=|x_k-z_k|\le|x_k-y_k|+|y_k-z_k|\le$

$\le\sup_i\{|x_i-y_i|\}+\sup_j\{|y_j-z_j|\}=d_\infty(x,y)+d_\infty(y,z)$

(3) $d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$

metryka Euklidesowa



Niezdegenerowanie i symetria znowu są oczywiste. Dowodzimy nierówności trójkąta.

$d_2(x,z) \overset{?}{\leq} d_2(x,y) + d_2(y,z) \qquad \sqrt{\sum (x_i - z_i)^2} \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum (y_i - z_i)^2}$

Rozważamy przypadek $y = 0$

$\sqrt{\sum (x_i - z_i)^2} \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{z_i^2} \qquad \sqrt{\sum (x_i + z_i)^2} \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{\sum z_i^2}$

ten znak zamieniamy na „+" dowodzimy bowiem dla wszystkich z_i, a prawa strona od znaku z_i nie zależy

obie strony nierówności dodatnie – porównajmy kwadraty

$\sum (x_i + z_i)^2 \overset{?}{\leq} \cancel{\sum x_i^2} + \cancel{\sum z_i^2} + \cancel{2}\sqrt{}\sqrt{}$

$\| \qquad \cancel{\sum x_i^2} + \cancel{\sum z_i^2} + \cancel{2} \sum x_i z_i$ zostaje $\sum x_i z_i \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum z_i^2}$

Rozważmy $\omega(\lambda) = \sum (x_i + \lambda z_i)^2 \quad \forall \lambda \ \omega(\lambda) \geq 0$ zatem $\Delta_\omega \leq 0$

$\omega(\lambda) = \sum x_i^2 + 2\lambda \sum x_i z_i + \lambda^2 \sum z_i^2 \qquad \Delta_\omega = 4\left(\sum x_i z_i\right)^2 - 4 \sum x_i^2 \sum z_i^2 \leq 0$ tzn

$\left(\sum x_i z_i\right)^2 \leq \sum x_i^2 \sum z_i^2 \Rightarrow \left|\sum x_i z_i\right| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum z_i^2}$

Wykazaliśmy, że $\forall x, z \in \mathbb{R}^n \quad d(x,z) \leq d(x,0) + d(z,0)$

Wykazaliśmy, że $\forall x,z \in \mathbb{R}^n \quad d_2(x,z) \leq d_2(x,0) + d_2(z,0)$

Zauważmy że d_2 jest translacyjnie niezmiennicza, tzn $d(a,b) = d(a+x, b+x)$

$$d_2(x,z) = d_2(x-z,0) = d_2((x-y)-(z-y),0) = d_2(x-y, z-y) \leq d_2(x-y,0) +$$
$$+ d_2(z-y,0) = d_2(x,y) + d_2(z,y) \quad \blacksquare$$

OBSERWACJA: Metryki d_1, d_∞ i d_2 na $\mathbb{R}^n$ powstały z metryki $|\cdot - \cdot|$ na $\mathbb{R}$ za pomocą odpowiednich wzorów. Podobnie mając metrykę ρ na X możemy „wyprodukować" $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ na $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n} = X^n$

$$\rho_1(x,y) = \rho(x_1,y_1) + \cdots + \rho(x_n,y_n) \qquad \rho_2(x,y) = \sqrt{\rho(x_1,y_1)^2 + \cdots + \rho(x_n,y_n)^2} \qquad \rho_\infty(x,y) = \sup_i \{\rho(x_i,y_i)\}$$

Na więcej, mając $(X_1,\rho_1), (X_2,\rho_2) \cdots (X_n,\rho_n)$ możemy skonstruować D_1, D_2, D_∞ na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

$$D_1(x,y) = \rho_1(x_1,y_1) + \cdots + \rho_n(x_n,y_n) \qquad D_2(x,y) = \sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2 + \cdots + \rho_n(x_n,y_n)^2} \qquad D_\infty(x,y) = \sup_i \{\rho_i(x_i,y_i)\}$$

Metryka pozwala zdefiniować pojęcie zbieżności ciągu i inne pojęcia typu ciąg Cauchy'ego, punkt skupienia itd w zbiorach innych niż $\mathbb{R}$.

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną

CIĄG ZBIEŻNY W X Niech (x_n) będzie ciągiem w X. Mówimy, że (x_n) jest zbieżny do $g \in X$ jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad d(g, x_n) < \varepsilon \qquad x \in K(g, \varepsilon)$$

CIĄG CAUCHY'EGO W X (x_n) - ciąg w X (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

PUNKT SKUPIENIA CIĄGU W X Punkt $h \in X$ jest punktem skupienia ciągu (x_n) jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : \ d(x_n, h) < \varepsilon \qquad x_n \in K(h, \varepsilon)$$

BARDZO WAŻNA DEFINICJA

Kulą otwartą o środku w x_0 i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

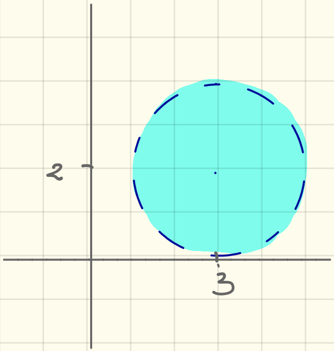
$$K(x_0, r) = \{ x \in X : \ d(x, x_0) < r \}$$

Kulą domkniętą ... nazywamy zbiór $\overline{K}(x_0, r) = \{ x \in X : \ d(x, x_0) \leq r \}$

KULE W RÓŻNYCH METRYKACH

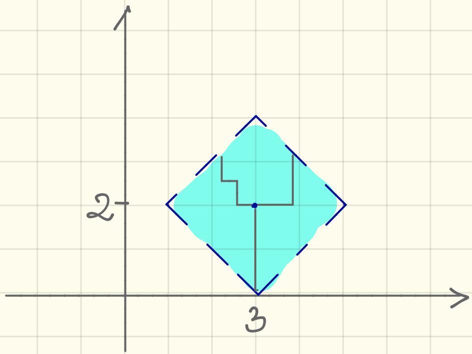
$X = \mathbb{R}^2$, d_2 … nic ciekawego

$K((3,2), 2)$

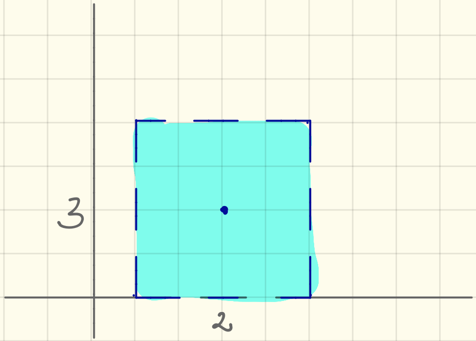


$X = \mathbb{R}^2$, d_1

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



$X = \mathbb{R}^2$, d_∞



ZBIEŻNOŚĆ W RÓŻNYCH METRYKACH

Metryka explicite pojawia się w definicji zbieżności. Czy to oznacza że różne metryki na tym samym zbiorze generują różne zbiory ciągów zbieżnych?

Mówimy że **metryki** ϱ i d na zbiorze X **są równoważne** jeśli spełniony jest warunek

$$\exists\, a>0,\ b>0 \ :\ \forall x,y\in X \quad d(x,y)\leq a\,\varrho(x,y) \ \text{i}\ \varrho(x,y)\leq b\, d(x,y)$$

STWIERDZENIE: Metryki d_1, d_2, d_∞ są równoważne w $\mathbb{R}^n$ (Metryki D_1, D_2, D_∞ są równoważne w $X_1\times\dots\times X_n$)

DOWÓD

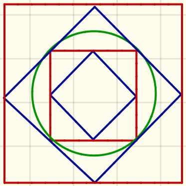
$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+\dots+|x_n-y_n| \qquad d_2(x,y)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2} \qquad d_\infty(x,y)=\sup_i\{|x_i-y_i|\}$$

Para d_1, d_∞:

$$d_1(x,y)=\sum_i|x_i-y_i|\leq n\cdot\sup_i\{|x_i-y_i|\}=n\cdot d_\infty(x,y)$$

$$d_\infty(x,y)\leq 1\cdot d_1(x,y)$$

Równoważność metryk jest relacją równoważności, zatem jest przechodnia.



Para d_2, d_∞

$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_i(x_i-y_i)^2}\leq\sqrt{n\left(\sup_i\{|x_i-y_i|\}\right)^2}=\sqrt{n}\,d_\infty(x,y)\ ,\quad d_\infty(x,y)\leq 1\, d_2(x,y)$$