WYKŁAD 5

TOPOLOGIA - OTWARTE, DOMKNIĘTE

DEFINICJA (na pierwszy rzut oka wzięta z sufitu) Niech X będzie dowolnym zbiorem. Topologię w X nazywamy rodzinę podzbiorów $\mathcal{T} \subset 2^X$ spełniającą warunki:

(1) Jeśli $\Theta_\lambda \in \mathcal{T}$ dla $\lambda \in \Lambda$ to $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Theta_\lambda \in \mathcal{T}$ $\quad$ $(X,\mathcal{T})$ przestrzeń topologiczna

(2) Jeśli Θ_1 i $\Theta_2 \in \mathcal{T}$ to $\Theta_1 \cap \Theta_2 \in \mathcal{T}$

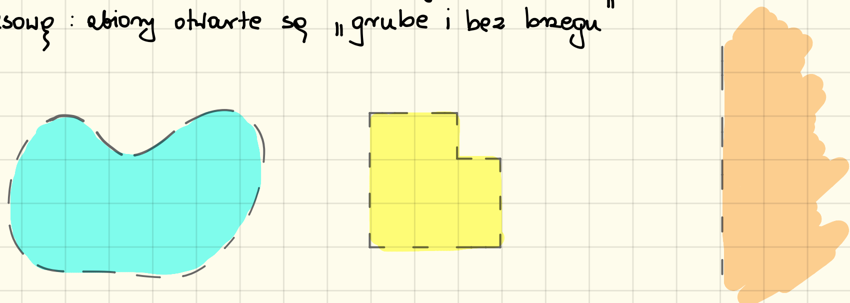
(3) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

z (2) wynika że przecięcie skończonej liczby zbiorów z $\mathcal{T}$ należy do $\mathcal{T}$

Oczywiście istnieją dwa, skrajne, mało ciekawe przypadki. W dowolnym zbiorze X możemy wziąć $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$ (topologia trywialna) $\mathcal{T}_1 = 2^X$ (topologia dyskretna). Okazuje się, że istnieje całe mnóstwo ważnych i ciekawych przestrzeni topologicznych:

DEFINICJA: Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $\Theta \subset X$ nazywamy otwartym jeśli $\forall x \in \Theta \ \exists r>0 : K(x,r) \subset \Theta$. Każdy punkt należy do Θ wraz z pewną kulą.

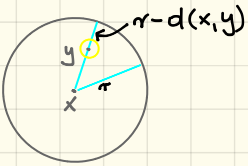
PRZYKŁADY $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ $\Theta =]a,b[$ jest otwarty, $]a,+\infty[$ jest otwarty, $[a,b[$ nie jest otwarty, bo nie zawiera żadnej kuli o środku w a; $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową: zbiory otwarte są „grube i bez brzegu"



Pytanie: jakie zbiory są otwarte w metryce dyskretnej?

STWIERDZENIE Kula otwarta jest zbiorem otwartym

DOWÓD: Niech $y \in K(x,r)$. Z df. kuli $d(x,y) < r$ zatem $r - d(x,y) > 0$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{2}(r - d(x,y))$



Pokażemy, że $K(y,\varepsilon) \subset K(x,r)$. Niech $z \in K(y,r)$, tzn $d(y,z) < \varepsilon$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + \frac{1}{2}(r - d(x,y)) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}d(x,y) <$$

$$< \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r \implies d(x,z) < r \implies z \in K(x,r)$$ ■

PRZYKŁAD (trudniejszy) $X = \{(x_n) : \exists M : \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| < M\}$ i.e. ograniczone ciągi liczbowe, $d((x_n),(y_n)) = \sup_n |x_n - y_n|$ $Z = \{(x_n) : \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$ Czy Z jest zbiorem otwartym?

Załóżmy, że jest. Oznacza to, że jeśli $x_n \to 0$ to istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $d((x_n),(y_n)) < \delta$ to $y_n \to 0$. Jednak jeśli $y_n = x_n + \frac{\delta}{2}$ to $d((x_n),(y_n)) = \frac{\delta}{2}$ i $y_n \to \delta/2$. Z nie jest więc otwarty. Widać, że w otoczeniu każdego punktu z Z są zarówno elementy z Z jak i elementy z $X \setminus Z$.

STWIERDZENIE: Zbiory otwarte w przestrzeni metrycznej wraz ze zbiorem $\emptyset$ tworzą topologię.

DOWÓD: (1) Niech Θ_α będzie rodziną zbiorów otwartych numerowaną elementami zbioru A. Weźmy $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} \Theta_\alpha$. Weźmy $x \in \mathcal{U}$. Istnieje $\alpha_0 \in A$ takie, że $x \in \Theta_{\alpha_0}$. Zbiór Θ_{α_0} jest otwarty, zatem dla pewnego $\varepsilon > 0$ $K(x,\varepsilon) \subset \Theta_{\alpha_0}$. Oczywiście także $K(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ jest więc otwarty. (2) Niech Θ_1 i Θ_2 będą otwarte. Weźmy $x \in \Theta_1 \cap \Theta_2$. Weźmy także ε_1 i $\varepsilon_2 > 0$ takie, że $K(x,\varepsilon_1) \subset \Theta_1$ i $K(x,\varepsilon_2) \subset \Theta_2$. Wybierzmy $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Wtedy $K(x,\varepsilon) \subset K(x,\varepsilon_1) \subset \Theta_1$ i $K(x,\varepsilon) \subset K(x,\varepsilon_2) \subset \Theta_2$, zatem $K(x,\varepsilon) \subset \Theta_1 \cap \Theta_2$. Zbiór $\Theta_1 \cap \Theta_2$ jest otwarty.
(3) X jest otwarty, bo zawiera wszystkie kule o wszystkich środkach i promieniach. ∎

STWIERDZENIE: Niech ρ i d będą metrykami w zbiorze X. Jeśli ρ i d są równoważne to zadawane przez nie topologie są jednakowe. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

DOWÓD: Niech a, b będą stałymi takimi, że $\forall x,y \in X$ $d(x,y) \leq a\rho(x,y)$ i $\rho(x,y) \leq b\,d(x,y)$. Niech $K^d(x,r)$ będzie kulą względem metryki d a $K^\rho(x,r)$ kulą względem ρ.

$$y \in K^d(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r \Rightarrow \frac{1}{b}\rho(x,y) \leq d(x,y) < r \Rightarrow \rho(x,y) < br \Rightarrow y \in K^\rho(x,br)$$

$\Rightarrow K^d(x,r) \subset K^\rho(x,br)$ podobnie

$$y \in K^\rho(x,r) \Rightarrow \rho(x,y) < r \Rightarrow d(x,y) \leq a\rho(x,y) < ar \Rightarrow y \in K^d(x,ar) \Rightarrow K^\rho(x,r) \subset K^d(x,ar)$$

Jeśli $\Theta \subset X$ jest otwarty względem d, to wraz z x Θ zawiera $K^d(x,\varepsilon)$ dla pewnego ε, zawiera więc też $K^\rho(x,\varepsilon/a)$, więc Θ jest otwarty względem ρ. Podobnie, gdy zamienimy rolami ρ i d. Kontrprzykład na tw. odwrotne stanowi $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. ∎

Każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną. Nie każda topologia pochodzi od metryki. Zbiory należące do $\mathcal{T}$ nazywa się otwartymi także wtedy gdy topologia nie pochodzi od metryki. My zajmować się będziemy w zasadzie tylko topologią metryczną.

Okazuje się, że przestrzeń topologiczna ma bardzo bogatą strukturę. Trochę się teraz o niej pouczymy. Będzie dużo definicji i nowych słów, ale postaramy się, żeby nie było bardzo nudno.

Zbieżność jest pojęciem topologicznym. Tzn. wcale nie potrzebujemy metryki, żeby zdefiniować ciągi zbieżne. Sama topologia wystarczy!

DEFINICJA: Otoczeniem otwartym punktu $x \in X$ nazywamy każdy otwarty zbiór zawierający x. Otoczeniem $x \in X$ nazywamy każdy zbiór zawierający jakieś otwarte otoczenie x. W przestrzeni metrycznej otoczeniem jest zbiór zawierający x wraz z pewną kulą otwartą. Zbiór otoczeń x oznaczać będziemy $\mathcal{N}(x)$

Zbieżność w języku topologicznym: (x_n) jest zbieżny do g jeśli spełniony jest warunek

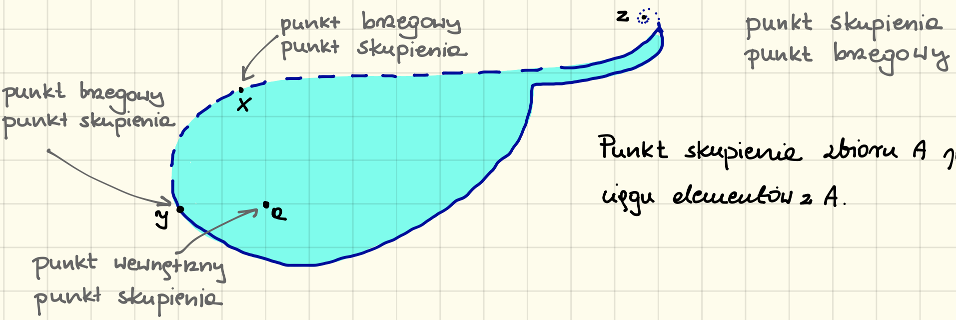
$$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}(g) \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > N \quad x_n \in \mathcal{U}$$

Bardzo łatwo przekonać się że obie definicje zbieżności w p. metrycznej są równoważne.

Topologia to więcej niż tylko zbiory otwarte: Są jeszcze zbiory domknięte, zwarte, spójne, wnętrze zbioru, domknięcie zbioru, punkt skupienia zbioru ... Zaczynamy budowanie „słownika topologicznego". Trzymamy się topologii metrycznej.

Niech $A \subset X$ będzie dowolnym zbiorem. Różne punkty zbioru X mogą mieć różne własności w sensie topologicznym: $a \in A$ jest punktem wewnętrznym zbioru A jeśli należy do A wraz z pewną kulą. Punkt $x \in X$ jest punktem brzegowym zbioru A jeśli dla każdego $r > 0$ $K(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ i $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$

Punkt $x \in X$ jest **punktem skupienia** zbioru A jeśli dla każdego $r > 0$ $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$.



Punkt skupienia zbioru A jest granicą ciągu elementów z A.

Int A – zbiór punktów wewnętrznych A, **Fr A** – zbiór punktów brzegowych A
$\bar{A}$ – domknięcie A – zbiór punktów skupienia A

DEFINICJA Zbiór, który zawiera wszystkie swoje punkty skupienia nazywamy **zbiorem domkniętym** (D jest domknięty jeśli $\bar{D} = D$)

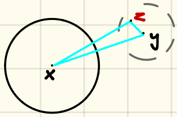
STWIERDZENIE Zbiór D jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy $X \setminus D$ jest otwarty.

DOWÓD: $\Rightarrow$ a.a. Załóżmy, że $X \setminus D$ nie jest otwarty. Istnieje wtedy punkt $x \in X \setminus D$ taki, że każda kula o środku w x zawiera elementy D. Wtedy jednak x jest punktem skupienia D, a że D jest domknięty, to $x \in D$, co jest sprzeczne z założeniem $x \in X \setminus D$.

$\Leftarrow$ Niech x będzie punktem skupienia D. x nie może należeć do $X \setminus D$, bo $X \setminus D$ jest otwarty zatem x musiałby należeć do $X \setminus D$ wraz z pewną $K(x,r)$. Innymi słowy $\exists r: K(x,r) \cap D = \emptyset$, wtedy x nie jest punktem skupienia D. Oznacza to, że $x \in D$ i D domknięty.

STWIERDZENIE Kula domknięta jest domknięta

DOWÓD: $X \setminus \bar{K}(x,r) = \{ y \in X : d(x,y) > r \}$. Niech $y \in X \setminus \bar{K}(x,r)$. Weźmy też $\varepsilon = \frac{1}{2}(d(x,y) - r)$. Wiadomo, że $\varepsilon > 0$. Wykażemy że jeśli $z \in K(y, \varepsilon)$ to $z \in X \setminus \bar{K}(x,r)$, tzn $d(x,z) > r$.



$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + \frac{1}{2}(d(x,y) - r)$$

$$\frac{1}{2} d(x,y) < d(x,z) - \frac{1}{2} r$$

$$d(x,z) > \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} d(x,y) > \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r \quad \blacksquare$$

STWIERDZENIE: (Własności zbiorów domkniętych) (1) Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest domknięta. (2) Przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięte. (3) X i $\emptyset$ są domknięte.

DOWÓD: (1) Wystarczy udowodnić, że sumę dwóch domkniętych jest domknięta. Niech $D_1, D_2 \subset X$ będą domknięte. Wtedy $X \setminus D_1$, $X \setminus D_2$ są otwarte $X \setminus (D_1 \cup D_2) = (X \setminus D_1) \cap (X \setminus D_2)$. Przecięcie dwóch otwartych jest otwarte, zatem $X \setminus (D_1 \cup D_2)$ jest otwarty. $D_1 \cup D_2$ jest więc domknięty. (2) Niech D_α będzie rodziną zbiorów domkniętych. Wtedy $O_\alpha = X \setminus D_\alpha$ jest rodziną zbiorów otwartych. $\bigcup_\alpha O_\alpha$ jest otwarty.

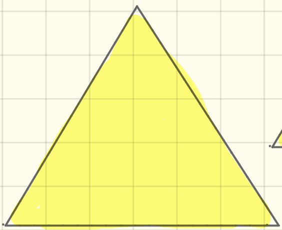
$\bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_\alpha X \setminus D_\alpha = X \setminus \left(\bigcap_\alpha D_\alpha\right)$ stąd $\bigcap_\alpha D_\alpha$ jest domknięty. (3) X zawiera wszystkie swoje punkty skupienia (bo zawiera wszystkie punkty) więc X domknięty. $\emptyset$ jest domknięty na mocy umowy. $\blacksquare$

WIĘCEJ PRZYKŁADÓW ZBIORÓW DOMKNIĘTYCH:

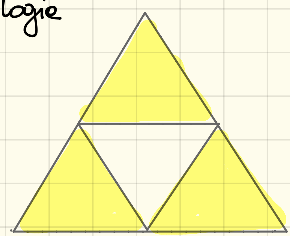
$X = \mathbb{R}$, zwykła topologia: $[a,b]$, $\{a\}$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$

$X = \mathbb{R}^2$, zwykła topologia

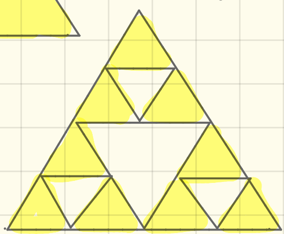
$S = \bigcap_n A_n$



A_1

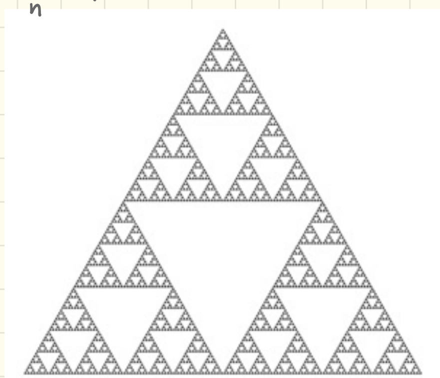


A_2



A_3

A_4 ...



X - rzeczywiste ciągi ograniczone z metryką supremum, Z - ciągi zbieżne do zera. Pokażemy, że Z jest domknięty. Rozważmy $X \setminus Z$. Jeśli $(x_n) \in X \setminus Z$ to znaczy, że x_n nie jest zbieżny do 0. Zatem nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu leży poza pewnym odcinkiem $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Weźmy $K((x_n), \frac{\varepsilon}{2})$. Jeśli $(y_n) \in K((x_n), \frac{\varepsilon}{2})$ to $\sup_n |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wyrazy ciągu (y_n) leżą nie dalej niż odpowiednie wyrazy (x_n). Jeśli nieskończenie wiele spośród nich spełnia $|x_n| > \varepsilon$ to wyrazy (y_n) z tymi samymi indeksami spełniają $|y_n| > \frac{\varepsilon}{2}$ zatem (y_n) nie jest zbieżny do zera $K((x_n), \frac{\varepsilon}{2}) \subset X \setminus Z$. $X \setminus Z$ jest otwarty więc Z domknięty.

STWIERDZENIE: $\overline{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

DOWÓD: $\overline{A}$ jest domknięty z definicji, $A \subset \overline{A}$ też z definicji. Załóżmy, że istnieje D: $A \subset D \subsetneq \overline{A}$ i D domknięty. Istnieje zatem $x \in \overline{A}$ taki, że x jest punktem skupienia A i nie należy do zbioru D. To jednak jest niemożliwe, gdyż $A \subset D$, każdy punkt skupienia A jest też punktem skupienia D, musi więc należeć do D bo D domknięty

STWIERDZENIE: Własności operacji domknięcia i wnętrza

(1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

(3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) $A \subset F$, F domknięty $\Rightarrow \overline{A} \subset F$

(6) $\overline{A} = X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus A))$

(1) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Int}\,A \subset \mathrm{Int}\,B$

(2) $\mathcal{O} \subset A$ i $\mathcal{O}$ otwarty $\Rightarrow \mathcal{O} \subset \mathrm{Int}\,A$

(3) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$

(4) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}\,A \cap \mathrm{Int}\,B$

DOWÓD: Praca samodzielna