## § 8. Zwartość

Jakąż cudowną własnością jest zwartość! Zwłaszcza w topologii różniczkowej czy algebraicznej z reguły wszystko robi się szybciej, łatwiej i pełniej, mając zwarte przestrzenie, rozmaitości, CW-kompleksy, grupy itd. I chociaż nie wszystko na świecie jest zwarte, to dla „niezwartych" problemów przypadek zwarty jest częstokroć dobrym punktem wyjścia. Musimy najpierw opanować „zwarty teren", który jest łatwiejszy do zdobycia, a następnie, modyfikując wypracowane już techniki, poszerzyć naszą drogę dla niezwartego przypadku. Tę regułę potwierdzają wyjątki. Niekiedy niezwartość także oferuje korzyści, dając „więcej miejsca" dla pewnych konstrukcji... Ale najpierw

Definicja (zwartość). Przestrzeń topologiczną nazywamy *zwartą*, jeśli każde jej otwarte pokrycie ma skończone podpokrycie. Oznacza to, że $X$ jest zwarta, jeśli spełniony jest następujący warunek: Jeśli $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest dowolnym otwartym pokryciem przestrzeni $X$, tzn. $U_\lambda \subset X$ są otwarte oraz $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$, to istnieje skończona liczba indeksów $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ takich, że $U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_r} = X$.

# $(X,d)$ - przestrzeń metryczna, $S \subset X$

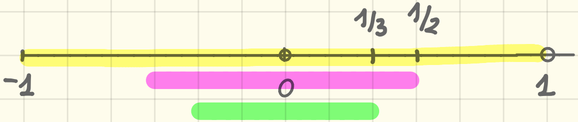
**DEFINICJA:** Rodzinę podzbiorów $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ nazywamy pokryciem zbioru $S$ jeśli $S \subset \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{U}_\alpha$. Pokrycie nazywamy otwartym jeśli każdy ze zbiorów $\mathcal{U}_\alpha$ jest otwarty.

(1)

**PRZYKŁAD:** $X=\mathbb{R}$, $S=]0,1[$, $\mathcal{U}_n = ]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}[$, $n\in\mathbb{N}$


(2)

$\mathcal{J}_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ $\quad n\in\mathbb{N}$



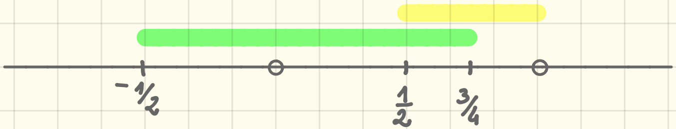

(3)

$\mathcal{D}_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ $\quad n\in\mathbb{N}$

(4)

$(Q_i)_{i\in\{1,2\}}$ $\quad Q_1 = ]1/2, 3/4[$

$Q_2 = ]1/2, 3/2[$




(5)

$K_t = K(t,\varepsilon)$ $\quad (K_t)_{t\in S}$

**DEFINICJA:** Niech $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ będzie pokryciem $S$. Jeśli $B\subset A$ jest taki, że $(U_\beta)_{\beta\in B}$ też jest pokryciem $S$ to $(U_\beta)_{\beta\in B}$ nazywamy **podpokryciem** $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$

**PRZYKŁAD:**

$S=]0,1[$

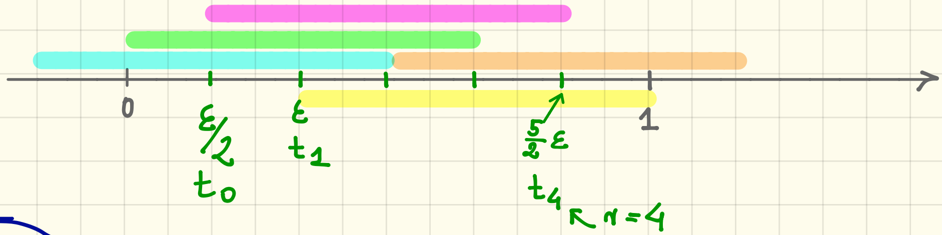
$K_t=K(t,\varepsilon)$ $\quad \varepsilon>0$ ← ustalone

$t\in S$

Wyjściowe pokrycie

$t_0=\varepsilon/2,\ t_1=\varepsilon,\ t_2=\frac{3}{2}\varepsilon,\ \dots,\ t_k=\frac{k+1}{2}\varepsilon \quad \dots \quad t_r=\frac{r+1}{2}\varepsilon$

$r:\ t_r+\varepsilon>1$




$(K_{t_i})_{i\in\{0,\dots,r\}}$ jest podpokryciem $(K_t)_{t\in S}$

**DEFINICJA:** $C \subset X$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy z każdego pokrycia $C$ można wybrać podpokrycie skończone.

Definicja dość abstrakcyjna
Co to właściwie znaczy ???

**PRZYKŁAD:** Odcinek domknięty $[a,b] \subset \mathbb{R}$ jest zwarty

**DOWÓD**

$$(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A} \supset [a,b]$$

dowolne pokrycie otwarte

$\exists \varepsilon > 0: \quad |c-d| = \varepsilon$ i $[c,d] \subset [0,1] \Rightarrow \exists \alpha: [c,d] \subset \mathcal{O}_\alpha$

tzn każdy przedział długości $\varepsilon$ zawarty w $[0,1]$ zawiera się w całości w pewnym zbiorze pokrycia

e.a

Załóżmy, że nie, tzn

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c,d: |c-d| = \varepsilon, [c,d] \subset [0,1]$ i $\forall \alpha \ [c,d] \not\subset \mathcal{O}_\alpha$

weźmy $\varepsilon = \frac{1}{n}$

oznaczmy $x_n$ środek odcinka, tzn

$$[c,d] = \left[x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n}\right] \subset [0,1]$$

$(x_n)$ - ograniczony ciąg liczbowy.

$(x_n)$ - ograniczony ciąg liczbowy zawiera podciąg zbieżny $(x_{n_k})$

$\boxed{g = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}} \Rightarrow \boxed{g \in [0,1], \text{ bo } [0,1] \text{ domknięty}} \Rightarrow \boxed{\exists \alpha : g \in \theta_\alpha, \text{ bo } (\theta_\alpha) \text{ pokrycie}}$

$\Downarrow$

zauważmy, że $c_{n_k} = x_{n_k} - \frac{1}{2n_k} \longrightarrow g$

oraz $d_{n_k} = x_{n_k} + \frac{1}{2n_k} \longrightarrow g$ $\Leftarrow$ $\exists \delta > 0 : \ ]g-\delta, g+\delta[ \subset \theta_\alpha$ bo $\theta_\alpha$ otwarty

$\exists k_0 : \forall k > 0 \quad [x_{n_k} - \frac{1}{2n_k}, x_{n_k} + \frac{1}{2n_k}] \subset \ ]g-\delta, g+\delta[ \subset \theta_\alpha$

$[x_{n_k} - \frac{1}{2n_k}, x_{n_k} + \frac{1}{2n_k}] \subset \theta_\alpha$ sprzeczne z df. $(x_n)$

Odcinek $[a,b]$ można pokryć skończoną liczbą przedziałów długości $\varepsilon$: $I_1, \ldots, I_r$. $\bigcup_{i=1}^{r} I_i \supset [a,b]$

$\forall i \ \exists \alpha_i \in A : I_i \in \theta_\alpha \qquad (\theta_{\alpha_i})_{i \in \{1,\ldots,r\}}$ jest skończonym podpokryciem $(\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ ∎

UWAGA: Stwierdzenie „każdy rzeczywisty ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny" dowodzimy np. metodą polowania na lwa.

**STWIERDZENIE:** Zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej jest ograniczony.

**DOWÓD:**

Niech $C \subset X$ będzie zwarty. Weźmy $x_0 \in C$ i $\mathcal{U}_m = K(x_0, m)$. $(\mathcal{U}_n)_{m \in \mathbb{N}}$ jest pokryciem $X$ więc jest także pokryciem $C$. Wybieramy podpokrycie skończone odpowiadające $\mathbb{N} \supset A = \{m_1, \dots, m_r\}$. Mamy

$$C \subset \bigcup_{n \in A} \mathcal{U}_n = K(x_0, \max\{n_1, \dots, n_r\}) \qquad \blacksquare$$

**DEFINICJA:** Zbiór $C \subset X$ nazywamy ciągowo zwartym jeśli każdy ciąg elementów $C$ zawiera podciąg zbieżny do granicy w $C$.

**STWIERDZENIE:** Zbiór ciągowo zwarty jest domknięty

**DOWÓD**

Niech $x \in X$ będzie punktem skupienia $C$. Weźmy $(x_n)$ : $x_n \in C$ i $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.
$C$ ciągowo zwarty więc $\exists (x_{n_k})$ : $C \ni g = \lim_{k \to \infty} x_{m_k}$, ale $(x_n)$ zbieżny do $x$, więc $g = x \in C$. $\blacksquare$

Warunek ciągowej zwartości jest łatwiejszy do sprawdzania niż warunek zwartości.

**TWIERDZENIE** W przestrzeni metrycznej zbiór jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty.

**DOWÓD** $\Leftarrow$ $C \subset X$

zwarty

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : $x_n \in C$ $\longrightarrow$ zbiór $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ma skończoną liczbę wyrazów. Można z niego wybrać stały (a więc zbieżny) podciąg.

$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ma nieskończenie wiele wyrazów $\to$ c.d.

Załóżmy, że nie istnieje podciąg zbieżny do elementu w $C$. Oznacza to, że dla każdego $y \in C$ istnieje otoczenie $U_y$ takie, że $U_y \cap E$ ma skończenie wiele wyrazów. $(\operatorname{Int} U_y)_{y \in C}$ jest otwartym pokryciem $C$. Wybieramy podpokrycie skończone $(\operatorname{Int} U_{y_i})_{i \in \{1 \dots r\}}$. Mamy więc $r$ zbiorów, w każdym skończoną liczbę wyrazów zbioru $E$ — zbiór $E$ ma skończoną liczbę wyrazów. Sprzeczne z założeniem o $E$.

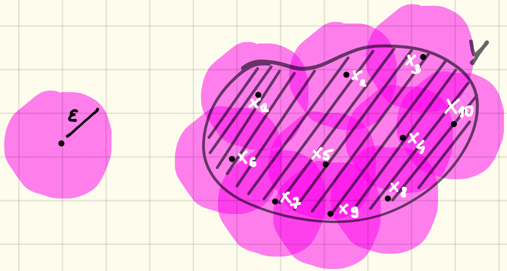
Dowód $\Leftarrow$ wymaga więcej pracy. Na razie podsumujmy:

$$
\begin{tikzcd}
\text{ZBIÓR ZWARTY} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \text{ZBIÓR CIĄGOWO ZWARTY} \arrow[dd, bend left] \\
& \text{ZBIÓR OGRANICZONY} \\
& \text{ZBIÓR DOMKNIĘTY}
\end{tikzcd}
$$

**DEFINICJA**: $Y \subset X$, $\varepsilon > 0$. Podzbiór $S \subset Y$ nazwiemy $\varepsilon$-siecią dla $Y$ jeśli

$$\forall_{y \in Y} \ \exists_{x \in S} : \ y \in K(x, \varepsilon)$$

tzn $\left(K(x,\varepsilon)\right)_{x \in S}$ jest otwartym pokryciem $Y$.




**LEMAT**: Jeśli $C \subset X$ jest ciągowo zwarty to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona $\varepsilon$-sieć $S \subset C$ (tzn $|S| < \infty$)

**DOWÓD**

$\varepsilon > 0$, $x_1 \in C$, $\mathcal{U}_1 = K(x_1, \varepsilon) \longrightarrow C \subset \mathcal{U}_1$ – KONIEC

dowolny

$C \not\subset \mathcal{U}_1$

$x_2 \in C \setminus \mathcal{U}_1$ $\quad \mathcal{U}_2 = K(x_2, \varepsilon) \longrightarrow C \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ – KONIEC

$C \not\subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$

$x_3 \in C \setminus (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$ $\quad \mathcal{U}_3 = K(x_3, \varepsilon) \longrightarrow C \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$ – KONIEC

...

Jeśli konstrukcja zakończy się po $r$ krokach – mamy skończoną $\varepsilon$-sieć. Jeśli nie mamy ciąg $(x_n)$ w $C$ taki że odległość dwóch różnych wyrazów jest $> \varepsilon$. Wybieramy podciąg zbieżny do $x_0 \in C$. Prawie wszystkie wyrazy podciągu są w $K(x_0, \varepsilon/2)$ oraz odległość dwóch dowolnych wyrazów $> \varepsilon \rightarrow$ sprzeczność. Konstrukcja kończy się po $r$ krokach i mamy skończoną $\varepsilon$-sieć.

**LEMAT:** Jeśli $C$ jest ciągowo zwarty to dla dowolnego otwartego pokrycia $C$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla $x \in C$ $K(x, \varepsilon)$ zawarta jest w pewnym elemencie pokrycia.

**DOWÓD:**

Jak dla odcinka e. e. Dla $\varepsilon = \frac{1}{n}$ bierzemy $x_n$ taki, że $K(x_n, \frac{1}{n})$ nie zawiera się w żadnym elemencie pokrycia. Z ciągu $(x_n)$ wybieramy podciąg $x_{n_k}$ zbieżny do $x_0 \in C$. Wtedy $x_0 \subset \mathcal{U}_\alpha$ dla pewnego $\alpha$. $\mathcal{U}_\alpha$ otwarty tzn $K(x_0, \delta) \subset \mathcal{U}_\alpha$. Prawie wszystkie wyrazy podciągu zawarte są w $K(x_0, \delta/2)$. Istnieje zatem $k$: $K(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset K(x_0, \delta) \subset \mathcal{U}_\alpha$. Wystarczy, że $x_{n_k} \in K(x_0, \delta/2)$ i $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$.

sprzeczne z konstrukcją $(x_n)$ ■

**DOWÓD ⇒**

Niech $C \subset X$ ciągowo zwarty, $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ pokrycie otwarte $C$, $\varepsilon > 0$ jak w lemacie 2. Na mocy lematu (1) istnieje skończona $\varepsilon$-sieć $S$ dla $C$. Niech $S = \{x_1, \dots, x_r\}$. $K(x_i, \varepsilon)$ zawiera się w pewnym $\mathcal{U}_{\alpha_i}$. Skoro $(K(x_i, \varepsilon))_{i \in \{1, \dots, r\}}$ jest pokryciem $C$ to $(\mathcal{U}_{\alpha_i})_{i \in \{1, \dots, r\}}$ też jest. Jest to skończone podpokrycie $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ■

ZBIÓR ZWARTY

ZBIÓR CIĄGOWO ZWARTY

w $(X,d)$

ZBIÓR OGRANICZONY

ZBIÓR DOMKNIĘTY

**TWIERDZENIE** w $\mathbb{R}^n$ każdy zbiór ograniczony i domknięty jest zwarty

**DOWÓD**

Normalna topologia w $\mathbb{R}^n$ jest metryczna tzn. można dowodzić ciągowej zwartości.

$D \subset \mathbb{R}^n$

domknięty ograniczony

zawarty w pewnej kuli. W metryce $d_\infty$ kule są kostkami. Oznacza to, że $D \subset [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^n, b^n]$

$(x_m)_{m \in \mathbb{N}} : x_m \in D \quad x_m^i \in [a^i, b^i] \Rightarrow (x_m^i)$ zawiera podciąg zbieżny do $x_0^i \in [a^i, b^i]$

Konstruujemy zbieżny podciąg $(x_m)$ 1. z ciągu $(x_m^1)$ wybieramy $x^1_{m_k}$ zbieżny do $x_0^1$ 2. z $(x_{m_k}^2)$ wybieramy podciąg $(x^2_{m_{k_2}})$ zbieżny do $x_0^2$ 3. … n. Powtarzając proces otrzymujemy podciąg $x_{\varphi(k)}$ taki że $x^i_{\varphi(k)} \longrightarrow x_0^i$. Ciąg $(x_{\varphi(k)})$ zbiega więc do $(x_0^1, \dots, x_0^n) = x_0$. D jest domknięty więc $x_0 \in D$. ■

**TWIERDZENIE:** Ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty

**DOWÓD:**

$C \subset X$, $f: X \longrightarrow Y$ ciągłe $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ otwarte pokrycie $f(C)$.

$f^{-1}(\theta_\alpha)$ jest otwarty, $(f^{-1}(\theta_\alpha))_{\alpha \in A}$ jest pokryciem $C$. Wybieramy skończony zbiór $B \subset A$ taki, że $(f^{-1}(\theta_\alpha))_{\alpha \in B}$ jest pokryciem $C$. Wtedy naturalnie $(\theta_\alpha)_{\alpha \in B}$ jest pokryciem $f(C)$. ∎

**WNIOSEK:** Rzeczywista funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy.

Istotnie: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(C)$ jest zwarty a więc ograniczony i domknięty

zwarty

$\sup f(x), \inf(x)$ są skończone

$\sup f(x)$ i $\inf f(x) \in f(x)$

$\exists x_\downarrow, x_\uparrow \in X$ : $f(x_\downarrow) = \inf f(x)$

$f(x_\uparrow) = \sup f(x)$

**STWIERDZENIE:** Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty

**DOWÓD (CIĄGOWY)**

$D \subset K$

domknięty zwarty

Weźmy ciąg $(x_n)$ elementów z $D$. Jest to też ciąg elementów z $K$, więc zawiera $(x_{n_k})$ zbieżny do $x_0 \in K$. $D$ jest domknięty, więc $x_0 \in D$. $D$ jest ciągowo zwarty.

Pokryciowy dowód powyższego stwierdzenie jest tematem do samodzielnego opracowania.