poznaniu pewnych zabarwień emocjonalnych. Niektóre stają się nam przyjazne i pomocne, gdy kilkakrotnie doświadczymy, jak ułatwiają lub wręcz umożliwiają przeprowadzenie dowodu; inne z kolei możemy traktować nieufnie z dokładnie przeciwstawnych powodów. Oczywiście własności o dobrej reputacji także mogą nam niekiedy przysporzyć kłopotów; bywają wreszcie własności zupełnie ambiwalentne. Otóż mogę Was zapewnić, że spójność, hausdorffowość i zwartość są w przeważającej mierze „dobrymi własnościami". Chciałoby się naturalnie wiedzieć, czy takie dobre własności przechodzą z „półproduktów" na „produkt końcowy" przy wykłych konstrukcjach i procesach topologicznych. Oto więc

Spójność to ostatnia własność topologiczna, którą będziemy się zajmować.

DEFINICJA: Zbiór $S \subset X$ nazywamy niespójnym jeśli istnieją zbiory S_1 i S_2 takie, że

$$S_1 \neq \emptyset, \quad S_2 \neq \emptyset, \quad S = S_1 \cup S_2 \quad \overline{S_1} \cap S_2 = S_1 \cap \overline{S_2} = \emptyset$$

S_1, S_2 są rozgraniczone

PRZYKŁAD: Jak wyglądają zbiory spójne w $\mathbb{R}$? Przedział (tzn odcinek otwarty, domknięty, z jednym końcem, półprosta otwarta lub domknięta) jest zbiorem spójnym.

DOWÓD: Niech I będzie przedziałem. Załóżmy że I jest niespójny, tzn rozkłada się na sumę dwóch niepustych i rozgraniczonych zbiorów:

$I = S_1 \cup S_2$, $\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset = S_1 \cap \overline{S_2}$. Weźmy dowolne $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. Oczywiście $x_1 \neq x_2$ wobec tego któryś z nich musi być mniejszy. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $x_1 < x_2$.

$$y = \inf\{x \in S_2 : x > x_1\}$$

$\{x \in S_2 : x > x_1\} \subset S_2$, y jest infimum podzbioru S_2 więc jest punktem skupienia S_2. Inaczej mówiąc $y \in \overline{S_2}$. Wiadomo zatem, że $y \notin S_1$ bo $\overline{S_2} \cap S_1 = \emptyset$. Zauważmy, że y jest także punktem skupienia S_1, tzn $y \in \overline{S_1}$.

Istotnie, $y \neq x_1$ (bo $y \notin S_1$), zatem $y > x_1$. W tej sytuacji $[x_1, y[\subset S_1$ gdyby bowiem istniał $z \in [a, y[$ taki, że $z \in S_2$ to byłoby to sprzeczne z definicją y. W dowolnym otoczeniu y są więc punkty z S_1 i $y \in \overline{S_1}$. Skoro tak to $y \notin S_2$ bo $\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset$. Mamy więc $y \notin S_1$ i $y \notin S_2$. ale $y \in I = S_1 \cup S_2$ — sprzeczność!

Pokazaliśmy, że przedział jest spójny. Trzeba jeszcze wykazać, że każdy zbiór spójny jest przedziałem. Weźmy więc S spójny. Oznaczamy $x_1 = \inf S$ $x_2 = \sup S$ x_1 może być $-\infty$ a x_2 może być $+\infty$. Jeśli $x_1 = x_2$ to $S = \{x_1\} = [x_1, x_1]$ i jest to przedział (choć krótki). Załóżmy więc, że $x_1 < x_2$. Mam wi c $S \subset [x_1, x_2]$. Weźmy teraz $y \in]x_1, x_2[$. Wykażemy e. e. że $y \in S$

Załóżmy więc, że $y \notin S$ i oznaczamy
$S_1 = [x_1, y[\cap S$ $S_2 =]y, x_2] \cap S$. S_1 i S_2 są niepuste, bo w dowolnej bliskości x_1 są elementy S, podobnie w dowolnej bliskości x_2 są elementy z S. Jest oczywiste, że $S = S_1 \cup S_2$

$S_1 \subset [x_1, y[\Rightarrow \overline{S_1} \subset [x_1, y]$ ponadto $S_2 \subset]y, x_2]$ więc $\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset$

$S_2 \subset]y, x_2] \Rightarrow \overline{S_2} \subset [y, x_2]$ ponadto $S_1 \in [x_1, y[$ więc $S_1 \cap \overline{S_2} = \emptyset$

S jest więc niespójny — sprzeczność.

Okazuje się więc, że każdy punkt $y \in]x_1, x_2[$ należy do S, zatem S jest przedziałem. ■

STWIERDZENIE Ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny.
DOWÓD: $f: X \to Y$ odwzorowanie ciągłe. $S \subset X$ zbiór spójny. Wykażemy e.e. że $f(S)$ spójny. Załóżmy, że nie, tzn istnieją $Z_1, Z_2 \subset Y$ takie, że $f(S) = Z_1 \cup Z_2$ i Z_1, Z_2 są niepuste i rozgraniczone.

$S_1 = f^{-1}(Z_1) \cap S$ $S_2 = f^{-1}(Z_2) \cap S$ Jest jasne, że $S = S_1 \cup S_2$ oraz, że S_1, S_2 są niepuste

Weźmy $x \in \overline{S_1} \cap S_2$ $x \in S_2 \Rightarrow f(x) \in Z_2$ $x \in \overline{S_1}$ tzn $\exists (x_n): x_n \in S_1$ i $x_n \to x$.

Wtedy $f(x_n) \in Z_1$ $\lim f(x_n) = x \in \overline{Z}_1$ ale $\overline{Z}_1 \cap Z_2 = \emptyset$ więc nie istnieje $x \in \overline{S}_1 \cap S_2$
tzn $\overline{S}_1 \cap S_2 = \emptyset$
Zamieniając 1 i 2 miejscami dowodzimy $S_1 \cap \overline{S}_2 = \emptyset$. S jest więc niespójny – sprzeczność. ■

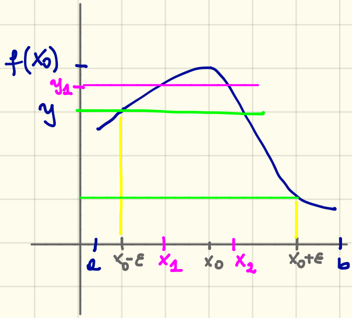
POŻYTECZNE WNIOSKI DLA FUNKCJI RZECZYWISTYCH

(1) I - przedział, f ciągła $\Rightarrow$ $f(I)$ jest przedziałem

(2) WŁASNOŚĆ DARBOUX Jeśli $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła to dla dowolnej liczby y pomiędzy $f(a)$ a $f(b)$ istnieje $x \in [a,b] : f(x) = y$

(3) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła injekcja $\Rightarrow$ f osiąga kresy na końcach przedziału.

DOWÓD: Przypuśćmy że f ma maksimum w $x_0 \in]a,b[$. Weźmy $y = \max\{f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)\}$ i niech $y_1 \in]y, f(x_0)[$. Na mocy własności Darboux istnieje $x_1 \in]x_0-\varepsilon, x_0[$ i $x_2 \in]x_0, x_0+\varepsilon[$ taki, że $f(x_2) = y_1 = f(x_1)$ zatem f nie jest injekcją



(4) $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ ciągła injekcja $\Rightarrow$ $f(]a,b[)$ jest przedziałem otwartym

DOWÓD Wiadomo, że $f(]a,b[)$ jest przedziałem. Niech y_0 będzie końcem $f(]a,b[)$. Załóżmy, że $y_0 \in f(]a,b[)$. Wtedy $\exists x_0 \in]a,b[$ $f(x_0) = y_0$. Ponadto $\exists \varepsilon : [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset]a,b[$. funkcja $f|_{[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]}$ osiąga kres wewnątrz przedziału – sprzeczność.

(5) $f: I \to \mathbb{R}$ jest ciągłą injekcją $\Rightarrow$ f monotoniczna

(6) $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ ciągła injekcja $\Rightarrow$ $f(]a,b[) =]c,d[$ $\Rightarrow$ istnieje
$f^{-1}:]c,d[\to]a,b[$ $\Rightarrow$ f^{-1} jest ciągła

DOWÓD: Jeśli f jest ciągłą injekcją to $f(]a,b[)$ jest otwartym przedziałem. Oznaczamy go $]c,d[$. $f:]a,b[\to]c,d[$ jest bijekcją więc istnieje odwzorowanie odwrotne. Jeśli $]x,y[\subset]c,d[$ to $f^{-1}(]x,y[)$ jest odcinkiem o końcach

$f(x), f(y)$. Z bijektywności wynika, że ten odcinek jest otwarty. Odcinki otwarte generują wszystkie zbiory otwarte w $\mathbb{R}$, więc ciągłość wystarczy sprawdzać na odcinkach.

DEFINICJA Zbiór nazywamy łukowo-spójnym jeśli każde dwa punkty tego zbioru można połączyć ciągłym obrazem odcinka.

STWIERDZENIE Zbiór łukowo spójny jest spójny. Twierdzenie odwrotne jest fałszywe.

DOWÓD Załóżmy, że S jest łukowo spójny i niespójny.

$x_1 \in S_1$

$x_2 \in S_2$

$\gamma : [0,1] \longrightarrow S$

$\gamma(0) = x_1$

$\gamma(1) = x_2$

$S = S_1 \cup S_2$

$\bar{S}_1 \cap S_2 = \emptyset = S_1 \cap \bar{S}_2$

$S_1 \neq \emptyset$

$S_2 \neq \emptyset$

$\gamma([0,1])$ spójny, $I_1 = \gamma([0,1]) \cap S_1$ $\quad I_2 = \gamma([0,1]) \cap S_2$, $x_1 \in I_1 \Rightarrow I_1 \neq \emptyset$

$x_2 \in I_2 \Rightarrow I_2 \neq \emptyset$

$$I_1 \subset S_1 \quad \bar{I}_1 \subset \bar{S}_1, \quad I_2 \subset S_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_1 \cap I_1 = \emptyset$$

$$I_2 \subset S_2 \quad \bar{I}_2 \subset \bar{S}_2, \quad I_1 \subset S_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$$

sprzeczność ze spójnością $\gamma([0,1])$

Kontrprzykład na tw. odwrotne

$$X = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(0,y) : y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) : x \neq 0\}$$

S jest spójny ale nie łukowo spójny