WYKŁAD 9

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Pracujemy z funkcjami $f: X \to \mathbb{R}$ gdzie $X \subset \mathbb{R}$. Zazwyczaj X jest przedziałem.

GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE

DEFINICJA: Niech I będzie przedziałem, x_0 punktem skupienia I, $f: I \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma granicę g w x_0 jeśli spełniony jest warunek

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta : \ \forall x \in \left(]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I\right) \setminus \{x_0\} \quad |f(x)-g|<\varepsilon$$

Jeśli $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$ piszemy $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, jeśli $x_0 = \inf I$ piszemy $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$, jeśli $x_0 = \sup I$ piszemy $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$

Mówimy, że f ma w x_0 granicę równą $+\infty$ $(-\infty)$ jeśli zachodzi

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta>0 : \ \forall x \in \left(]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I \setminus \{x_0\}\right) \quad f(x)>M \ (\text{dla } +\infty) \to \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$f(x)<M \ (\text{dla } -\infty) \to \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$I =]a,+\infty[,\ [a,\infty[,\ \mathbb{R}$

rozważamy granicę w $+\infty$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists R \in I : \ x>R \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$$

$I =]-\infty, a[,\ ]-\infty, a],\ \mathbb{R}$

rozważamy granicę w $-\infty$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists R \in I : \ x<R \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$$

Przypadek $g = \pm\infty$ z całą pewnością potrafią Państwo opisać samodzielnie.

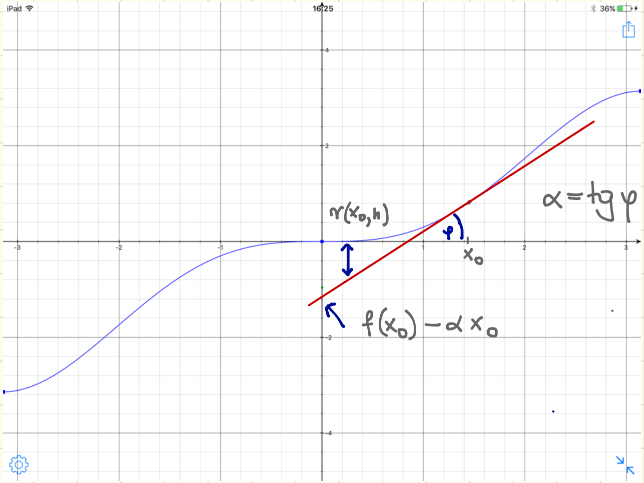
POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE

DEFINICJA: $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$ Mówimy, że f jest różniczkowalna w x_0 jeśli istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + r(x_0,h) \quad \text{i} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(x_0,h)}{h} = 0$$

α nazywamy pochodną f w punkcie x_0, $r(x_0,h)$ nazywamy resztą, $\alpha = f'(x_0)$

UWAGA: $x = x_0 + h$ $\quad h = x - x_0$ $\quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + r(x_0+h) = \underbrace{\alpha x + (f(x_0) - \alpha x_0)}_{\text{funkcja „liniowa" tzn typu } x \mapsto ax+b} + r(x_0, x-x_0)$



UWAGA: Mówimy, że $r(x_0,h)$ jest względem h małą rzędu wyższego niż 1

DEFINICJA $r:]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest małą rzędu wyższego niż k jeśli

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t^k} = 0$$

KILKA OBSERWACJI

(1) Funkcja różniczkowalna w x_0 jest ciągła w x_0: Ustalmy $\varepsilon > 0$

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| = |\alpha \cdot h + r(x_0,h)| = |h|\left|\alpha + \frac{r(x_0,h)}{h}\right| \underset{|h|<\delta_1}{<} |h| \cdot 2 \cdot |\alpha| \underset{|h|<\varepsilon/2|\alpha|}{<} \varepsilon$$

Skoro $\frac{r(x_0,h)}{h} \to 0$ to biorąc małe h można to dowolnie zmniejszyć. Istnieje δ_1: $|h| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| < |\alpha|$. Wtedy $\left|\alpha + \frac{r(x_0,h)}{h}\right| < 2|\alpha|$.

Ostatecznie trzeba wziąć $|h| < \delta < \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right\}$.

(2) Pochodna jest wyznaczona jednoznacznie: Niech α, α' spełniają definicję pochodnej

$$\begin{array}{rl} & f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + r(x_0,h) \\ - & f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha' h + r'(x_0,h) \\ \hline & 0 = (\alpha - \alpha')h + r(x_0,h) - r'(x_0,h) \end{array}$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{h}\left(r'(x_0,h) - r(x_0,h)\right)$$

$$\underbrace{|\alpha - \alpha'|}_{\text{równe } 0} = \frac{1}{|h|}\left|r'(x_0,h) - r(x_0,h)\right| \leq \underbrace{\left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| + \left|\frac{r'(x_0,h)}{h}\right|}_{\text{dowolnie małe}}$$

(3) f różniczkowalna w x_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ← iloraz różnicowy

$\Rightarrow$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + r(x_0,h) - \cancel{f(x_0)}}{h} = \alpha + \frac{r(x_0,h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \alpha$$

$\Leftarrow$

Niech $\alpha = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Weźmy $r(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h$

$\Leftarrow$ Niech $\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ weźmy $r(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(x_0,h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \alpha = 0$$

f jest więc różniczkowalna w x_0 z pochodną α.

(4) Jeśli $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $\forall x \in I$ f różniczkowalna w x to mówimy f różniczkowalna w I i funkcję $x \longmapsto f'(x)$ nazywamy funkcję pochodną dla f lub pochodną f.

I – przedział otwarty

PRZYKŁADY:

(1) $f(x) = x^n$ $\quad (x+h)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \underbrace{\binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + h^n}_{r(x,h)}$

$$\frac{r(x,h)}{h} = \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$f'(x) = n x^{n-1}$

(2) $g(x) = \sin(x)$ $\quad \sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \sin h = \sin x + \sin x(\cos h - 1) + \cos x \cdot h + \cos x(\sin h - h) =$

$$= \sin x + \cos x \cdot h + \underbrace{\sin x(\cos h - 1) + \cos x(\sin h - h)}_{r(x,h)}$$

$$\frac{r(x,h)}{h} = \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} + \cos x \Big(\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 1} - 1 \Big)$$

$g'(x) = \cos x$

obie granice da się zrobić geometrycznie.

PODSTAWOWE PRAWA RÓŻNICZKOWANIA

(1) $f,g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \in]a,b[$ f,g różniczkowalne w x, $\lambda \in \mathbb{R}$: λf, $f+g$, fg różniczkowalne w x

oczywiste oczywiste

$$\frac{1}{h}\left[(fg)(x+h)-(fg)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\right]=$$

$$=\underbrace{f(x+h)}_{\downarrow\, f(x)}\underbrace{\frac{1}{h}\left[g(x+h)-g(x)\right]}_{\downarrow\, g'(x)}+\underbrace{\frac{1}{h}\left[f(x+h)-f(x)\right]}_{\downarrow\, f'(x)}g(x)\longrightarrow f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

$$(fg)'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

REGUŁA LEIBNIZA

(2) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in I$, $f(x) \in J$, $f'(x)$, $g'(f(x))$ istnieją: wtedy $g \circ f$ różniczkowalne w x i $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

REGUŁA ŁAŃCUCHOWA

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[g\left(f(x+h)\right)-g\left(f(x)\right)\right]=\frac{1}{h}\left[g\left(f(x)+\overbrace{f'(x)h+r_f(x,h)}^{k}\right)-g(f(x))\right]=$$

$$\frac{1}{h}\left[g(f(x))+g'(f(x))\left\{f'(x)\cdot h+r_f(x,h)\right\}+r_g(f(x),k)-g(f(x))\right]$$

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[g\left(f(x+h)\right)-g\left(f(x)\right)\right]=\frac{1}{h}\left[g\Big(f(x)+\overbrace{f'(x)h+r_f(x,h)}^{k}\Big)-g(f(x))\right]=$$

$$\frac{1}{h}\left[\cancel{g(f(x))}+g'(f(x))\left\{f'(x)\cdot h+r_f(x,h)\right\}+r_g(f(x),k)-\cancel{g(f(x))}\right]=$$

$$\frac{1}{h}\left[g'(f(x))f'(x)h+g'(f(x))r_f(x,h)+r_g(f(x),k)\right]=g'(f(x))f'(x)+g'(f(x))\frac{r_f(x,h)}{h}+\frac{r_g(f(x),k)}{h}$$

to co trzeba

$\frac{r_f(x,h)}{h}\xrightarrow{h\to 0} 0$ $\qquad$ $\frac{r_g(f(x),k)}{h}$?

$$\frac{r_g(f(x),k)}{k}\cdot\frac{k}{h}=\frac{r_g(f(x),k)}{k}\left\{\frac{f'(x)h+r_f(x,h)}{h}\right\}=\frac{r_g(f(x),k)}{k}\left\{f'(x)+\frac{r_f(x,h)}{h}\right\}\xrightarrow{h\to 0} 0$$

$\frac{r_g(f(x),k)}{k}\xrightarrow{h\to0}0$, $\quad f'(x)\xrightarrow{h\to0}f'(x)$, $\quad \frac{r_f(x,h)}{h}\xrightarrow{h\to0}0$

gdy $h\to 0$ także $k\longrightarrow 0$

(3) $\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni x\longmapsto\frac{1}{x}$ $\qquad \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right)=-\frac{1}{x(x+h)}\xrightarrow{h\to 0}-\frac{1}{x^2}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

(4) $f:I\to\mathbb{R}$ $\quad x\in I$ $\quad f'(x)$ istnieje, $f(x)\neq 0$. Wtedy $\qquad \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{f^2(x)}f'(x)$

$x\longmapsto\frac{1}{f(x)}$ jest złożeniem f z $x\longmapsto\frac{1}{x}$

(6) $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, $f'(x), g'(x)$ istnieją, $f(x) \neq 0$ wtedy

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \left(g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right)' = g'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} + g(x)\cdot\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = g'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} + g(x)\left(-\frac{1}{[f(x)]^2}f'(x)\right) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f'(x)]^2}$$

DEFINICJA: $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Mówimy, że f ma w x_0 maksimum/minimum lokalne jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ taki że

przestrzeń metryczna

$\forall y \in K(x_0, \varepsilon)$ $f(y) \leqslant f(x_0)$ maksimum

$f(y) \geqslant f(x_0)$ minimum

ekstremum lokalne jest to lokalne maksimum lub minimum.

SERIA POTRZEBNYCH TWIERDZEŃ

STWIERDZENIE Jeśli funkcja rzeczywista ma w x ekstremum i jest w x różniczkowalna, to $f'(x)=0$

DOWÓD dla minimum

Niech ε będzie jak w df. maksimum, tzn dla $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ $f(y) \leqslant f(x)$

dla $0<h<\varepsilon$ $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0 \longrightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$

dla $-\varepsilon<h<0$ $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0 \longrightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$

$\Rightarrow f'(x)=0$ ■

TWIERDZENIE ROLLE'A Jeśli f jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $]a,b[$ oraz $f(a)=f(b)$ to istnieje $x \in]a,b[$ taki, że $f'(x)=0$

DOWÓD

Jeśli f jest stała na $[a,b]$ to $f'(x)=0$ dla wszystkich $x \in]a,b[$. Jeśli f nie jest stała to istnieje $c \in]a,b[$ taki, że $f(c) \neq f(a) = f(b)$. Załóżmy że $f(c) > f(a)$.

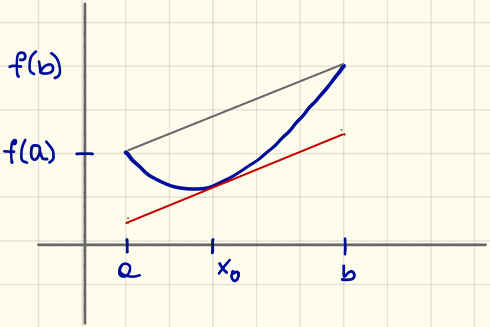
Istnieje $x_0 \in]a,b[$: $f(x_0) = \sup f([a,b])$ (f ciągła na zbiorze zwartym...)
Wiadomo że $f(x_0) \geqslant f(c) > f(a) = f(b)$. Z poprzedniego stwierdzenie $f'(x_0)=0$

Jeśli $f(c)<f(a)$ używamy y_0 : $f(y_0) = \inf f([a,b])$ ■

TWIERDZENIE LAGRANGE'A (ALBO O WARTOŚCI ŚREDNIEJ)

f ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna w $]a,b[$. Istnieje $x \in]a,b[$ taki, że

$$f'(x)(b-a) = f(b)-f(a)$$



Równanie szarej prostej

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Funkcja $x \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x)-g(x)$ spełnia założenia tw. Rolle'a $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ Istnieje $x_0 \in]a,b[$ takie, że $\varphi'(x_0)=0$

$$\varphi'(x) = f'(x)-g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

∎

Jeśli z Warszawy do Łodzi przejechałeś z prędkością średnią 100 km/h to znaczy, że w przynajmniej jednej chwili czasu jechałeś z prędkością 100 km/h.

WNIOSKI Z TWIERDZENIA LAGRANGE'A

f różniczkowalna w $]a,b[$

(1) $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ rosnąca na $]a,b[$

(2) $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ malejąca na $]a,b[$

(3) $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \Rightarrow f$ stała na $]a,b[$

DOWÓD:

Weźmy dowolne x_1, x_2 takie, że $a < x_1 < x_2 < b$ istnieje $x \in]x_1, x_2[$ takie, że $f'(x)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

$(x_2 - x_1) > 0$ zatem $f(x_2) - f(x_1)$ ma znak jak $f'(x)$, stąd (1), (2), (3). ■

JESZCZE JEDEN WNIOSEK f różniczkowalna na $]a,b[\setminus \{x_0\}$

jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in]a, x_0[$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in]x_0, b[$ to f ma w x_0 maksimum

jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in]a, x_0[$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in]x_0, b[$ to f ma w x_0 minimum

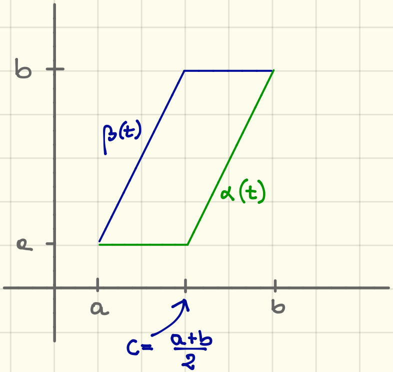
dowód oczywisty.

WŁASNOŚĆ DARBOUX DLA POCHODNYCH

$f: I \to \mathbb{R}$ różniczkowalna

$[a,b] \subset I$. Dla dowolnego y pomiędzy $f'(a)$ i $f'(b)$ istnieje $x \in]a,b[$ taki że $f'(x) = y$

DOWÓD:



$$\alpha(t) = \begin{cases} a & t \in [a,c] \\ 2t-b & t \in]c,b] \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 2t-a & t \in [a,c] \\ b & t \in]c,b] \end{cases}$$

α, β są ciągłe na $[a,b]$ $\quad a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$ na $]a,b[$

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} \quad g \text{ ciągła na }]a,b[$$

$$\lim_{t \to a^+} g(t) = \lim_{t \to a^+} \frac{f(2t-a) - f(a)}{2t-a-a} = \lim_{t \to a^+} \frac{f(a + 2(t-a)) - f(a)}{2(t-a)} = f'(a)$$

$$\lim_{t \to b^-} g(t) = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b) - f(2t-b)}{b-2t+b} = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b + 2(t-b)) - f(b)}{2(b-t)} = f'(b)$$

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} \quad \text{dla } t \in]a,b[\quad g(a) = f'(a) \quad g(b) = f'(b)$$

g jest ciągła na $[a,b]$ więc przyjmuje każdą wartość między $f'(a)$ i $f'(b)$

Niech $t_0 \in]a,b[\; : \; g(t_0) = y$

$$\alpha(t_0) = x_1 < x_2 = \beta(t_0) \qquad a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

f spełnia założenia tw. Lagrange'a na $[x_1, x_2]$

Niech x : $\quad f'(x)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(\beta(t_0)) - f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0) - \alpha(t_0)} = g(t_0) = y \qquad \blacksquare$$

PRZYKŁAD:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{różniczkowalna}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{pochodna nieciągła}$$

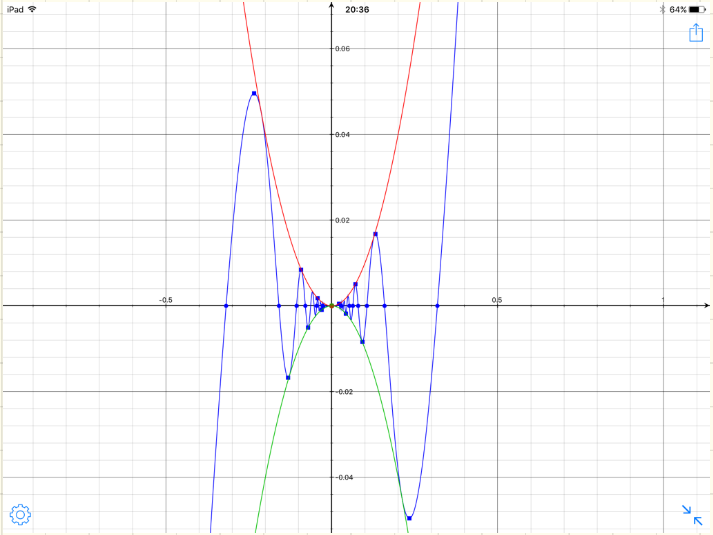
PRZYKŁAD:

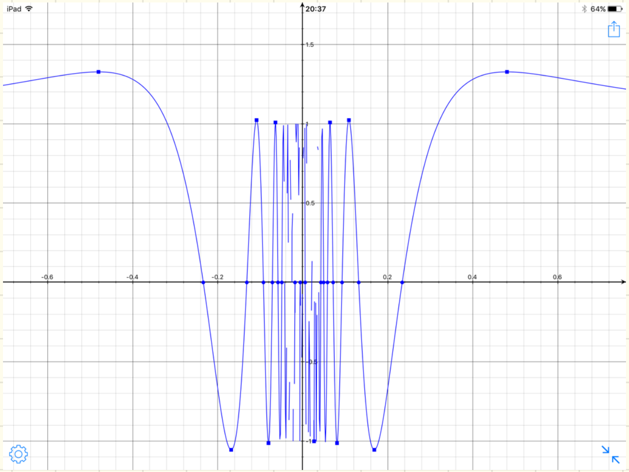
$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

różniczkowalna

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

pochodna nieciągła





TWERDZENIE $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłe i różniczkowalne w $]a,b[$. Istnieje $x_0 \in]a,b[$ taki, że

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0) = [g(b)-g(a)]\,f'(x_0)$$

DOWÓD:

$$\varphi(x) = [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x)$$

ciągłe na $[a,b]$, różniczkowalne w $]a,b[$

$$\varphi(a) = [f(b)-f(a)]\,g(a) - [g(b)-g(a)]\,f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) =$$

$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$\varphi(b) = [f(b)-f(a)]\,g(b) - [g(b)-g(a)]\,f(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) =$$

$$= -f(a)g(b) + g(b)f(a)$$

φ spełnia warunki twierdzenia Rolle'a na $[a,b]$.

$$x_0:\ \varphi'(x_0) = 0 = [f(b)-f(a)]\,g'(x_0) - [g(b)-g(a)]\,f'(x_0) \Rightarrow [f(b)-f(a)]\,g'(x_0) = [g(b)-g(a)]\,f'(x_0) \quad \blacksquare$$

STWIERDZENIE $f: I \to \mathbb{R}$ różniczkowalna, $x_0 \in I$: $f'(x_0) > 0$
Wtedy $\exists\, \delta > 0$ taka, że dla $0 < h < \delta$ $\quad f(x_0+h) > f(x_0)$, $\quad f(x_0-h) < f(x_0)$

DOWÓD

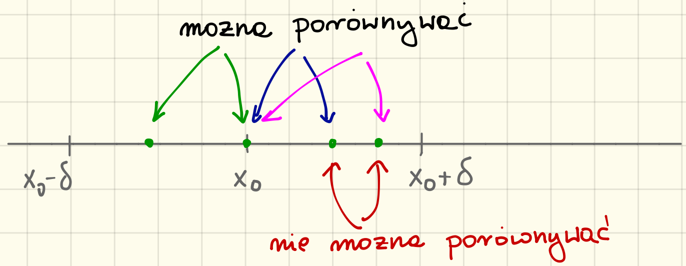
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(x_0)'h + r(x_0,h)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\left(f'(x_0) + \frac{r(x_0,h)}{h} \right)$$

Z różniczkowalności f wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $\left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| < f'(x_0)$. Wtedy $\left(f'(x_0) + \frac{r(x_0,h)}{h}\right) > 0$. Znak $h\left(f'(x_0) + \frac{r(x_0,h)}{h}\right)$ zależy od znaku h.

Zatem znak $f(x_0+h) - f(x_0)$ zależy od znaku h ∎

UWAGA



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x + x^2\sin^2\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} + 2x\sin^2\frac{1}{x} - 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$