Czy dwie nierównoważne metryki mogą zadać taką samą topologię?

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

1. Sprawdźmy czy dane metryki są równoważne? (lub nie są)

Metryki są równoważne, gdy:

$$\exists_{a,b>0} : \forall_{x,y} \quad d(x,y) \leq a \cdot \rho(x,y) \ \wedge \ \rho(x,y) \leq b \cdot d(x,y)$$

Zatem metryki nie będą równoważne, jeśli:

$$\forall_{a,b>0} \ \exists_{x,y} : \ d(x,y) > a \cdot \rho(x,y) \ \vee \ \rho(x,y) > b \cdot d(x,y)$$

Podstawiając nasze metryki do pierwszej nierówności warunku na nierównoważność:

$$|x-y| > a \cdot \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

$a < 1+|x-y|$ – widzimy, że ~~[illegible]~~ $\forall_a \ \exists_{x,y} : a < 1+|x-y|$,

czyli pierwszy warunek jest spełniony.

Zatem $d(x,y)$ i $\rho(x,y)$ nie są równoważne.

2. Udowodnijmy, że tworzą jedną topologię.

$K^d(x,r)$ – kula względem metryki d

$K^\rho(x,r)$ – kula względem metryki ρ

(i) $y \in K^d(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r$

łatwo zauważyć, że $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq |x-y| < r \Rightarrow y \in K^\rho(x,r)$

$$y \in K^d(x,r) \Rightarrow y \in K^\rho(x,r)$$

$$K^d(x,r) \subset K^\rho(x,r)$$

(ii) $y \in K^\rho(x,r) \Rightarrow \rho(x,y) < r$

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} < r$$

$$|x-y| < r + r|x-y|$$

~~[illegible]~~

$\rightarrow |x-y| \cdot (1-r) < r$

$\underbrace{|x-y|}_{d(x,y)} < \frac{r}{1-r}$

dla $r<1$, $r>0$

$\frac{r}{1-r} = R$

$r + Rr = R$

$r = \frac{R}{1+R}$

$$K^\rho(x,r) \subset K^d\left(x, \frac{r}{1+r}\right)$$

Jeśli $\mathcal{O} \subset X$ jest otwarty względem d, to wraz z x $\mathcal{O}$ zawiera $K^d(x,r)$ dla pewnego r, zawiera więc także $K^\varrho(x,r)$, więc $\mathcal{O}$ jest otwarty względem ϱ. Analogicznie, gdy zamienimy rolami ϱ i d. Zatem metryki ϱ i d zadają tę samą topologię.

$\square$

Wniosek: Dwie nierównoważne metryki mogą zadać tę samą topologię.