Przekątniowy dowód nieprzeliczalności $\mathbb{R}$

Wykłady z Analizy I R

R. Janowski[1] M. Miękus[2] P. Słota[2]

[1]Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

[2]Kolegium MISMAP
Uniwersytet Warszawski

12 października 2016

Dowód zostanie przeprowadzony metodą nie wprost.
Załóżmy więc, że zbiór $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$.

-

Twierdzenie (1)

Jeśli nieprzeliczalny zbiór X zawiera się w Y, to Y jest nieprzeliczalny.

-

Twierdzenie (1)

Jeśli nieprzeliczalny zbiór X zawiera się w Y, to Y jest nieprzeliczalny.

- Rozważmy zatem podzbiór $A =]0, 1[$ liczb rzeczywistych. Przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej nieskończony ciąg cyfr tworzących liczbę należącą do zbioru A (dla ułamków o skończonym rozwinięciu dziesiętnym późniejsze pozycje wypełniamy zerami). Ciągi te są postaci:
  $s_n = 0, c_{n,1}\ c_{n,2}\ c_{n,3}\ c_{n,4}\ \ldots$
  Gdzie: $\forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ c_{n,m} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Ułóżmy te ciągi w tablicę:

$s_1 = 0, c_{1,1}\ c_{1,2}\ c_{1,3}\ c_{1,4}\ \ldots$

$s_2 = 0, c_{2,1}\ c_{2,2}\ c_{2,3}\ c_{2,4}\ \ldots$

$s_3 = 0, c_{3,1}\ c_{3,2}\ c_{3,3}\ c_{3,4}\ \ldots$

$s_4 = 0, c_{4,1}\ c_{4,2}\ c_{4,3}\ c_{4,4}\ \ldots$

$\vdots$

Następnie skonstruujmy podobny ciąg s w następujący sposób:

$s = 0, f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ \ldots$

Gdzie:

$\forall n \quad f_n \equiv c_{n,n} + 1 \pmod{10}$

-

Examples

$s_1 = 0,\ 3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 7\ 0\ 6\ 7\ 9\ \ldots$
$s_2 = 0,\ 8\ 6\ 2\ 8\ 0\ 3\ 4\ 8\ 2\ 5\ \ldots$
$s_3 = 0,\ 0\ 6\ 2\ 8\ 6\ 2\ 0\ 8\ 9\ 9\ \ldots$
$s_4 = 0,\ 5\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 8\ 1\ 6\ 4\ \ldots$
$s_5 = 0,\ 5\ 8\ 2\ 0\ 9\ 7\ 4\ 9\ 4\ 4\ \ldots$
$s_6 = 0,\ 6\ 9\ 3\ 9\ 9\ 3\ 7\ 5\ 1\ 0\ \ldots$
$s_7 = 0,\ 5\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4\ 1\ 9\ 7\ 1\ \ldots$
$s_8 = 0,\ 2\ 6\ 4\ 3\ 3\ 8\ 3\ 2\ 7\ 9\ \ldots$
$s_9 = 0,\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ \ldots$
$s_{10} = 0,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ \ldots$
$\vdots$
$s = 0,$

-

Examples

$s_1 = 0,\ 3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 7\ 0\ 6\ 7\ 9\ \ldots$

$s_2 = 0,\ 8\ 6\ 2\ 8\ 0\ 3\ 4\ 8\ 2\ 5\ \ldots$

$s_3 = 0,\ 0\ 6\ 2\ 8\ 6\ 2\ 0\ 8\ 9\ 9\ \ldots$

$s_4 = 0,\ 5\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 8\ 1\ 6\ 4\ \ldots$

$s_5 = 0,\ 5\ 8\ 2\ 0\ 9\ 7\ 4\ 9\ 4\ 4\ \ldots$

$s_6 = 0,\ 6\ 9\ 3\ 9\ 9\ 3\ 7\ 5\ 1\ 0\ \ldots$

$s_7 = 0,\ 5\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4\ 1\ 9\ 7\ 1\ \ldots$

$s_8 = 0,\ 2\ 6\ 4\ 3\ 3\ 8\ 3\ 2\ 7\ 9\ \ldots$

$s_9 = 0,\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ \ldots$

$s_{10} = 0,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ \ldots$

$\vdots$

$s = 0,\ 4$

-

Examples

$s_1 = 0,\ 3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 7\ 0\ 6\ 7\ 9\ \ldots$

$s_2 = 0,\ 8\ 6\ 2\ 8\ 0\ 3\ 4\ 8\ 2\ 5\ \ldots$

$s_3 = 0,\ 0\ 6\ 2\ 8\ 6\ 2\ 0\ 8\ 9\ 9\ \ldots$

$s_4 = 0,\ 5\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 8\ 1\ 6\ 4\ \ldots$

$s_5 = 0,\ 5\ 8\ 2\ 0\ 9\ 7\ 4\ 9\ 4\ 4\ \ldots$

$s_6 = 0,\ 6\ 9\ 3\ 9\ 9\ 3\ 7\ 5\ 1\ 0\ \ldots$

$s_7 = 0,\ 5\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4\ 1\ 9\ 7\ 1\ \ldots$

$s_8 = 0,\ 2\ 6\ 4\ 3\ 3\ 8\ 3\ 2\ 7\ 9\ \ldots$

$s_9 = 0,\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ \ldots$

$s_{10} = 0,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ \ldots$

$\vdots$

$s = 0,\ 4\ 7$

-

Examples

$s_1 = 0,\ 3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 7\ 0\ 6\ 7\ 9\ \ldots$

$s_2 = 0,\ 8\ 6\ 2\ 8\ 0\ 3\ 4\ 8\ 2\ 5\ \ldots$

$s_3 = 0,\ 0\ 6\ 2\ 8\ 6\ 2\ 0\ 8\ 9\ 9\ \ldots$

$s_4 = 0,\ 5\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 8\ 1\ 6\ 4\ \ldots$

$s_5 = 0,\ 5\ 8\ 2\ 0\ 9\ 7\ 4\ 9\ 4\ 4\ \ldots$

$s_6 = 0,\ 6\ 9\ 3\ 9\ 9\ 3\ 7\ 5\ 1\ 0\ \ldots$

$s_7 = 0,\ 5\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4\ 1\ 9\ 7\ 1\ \ldots$

$s_8 = 0,\ 2\ 6\ 4\ 3\ 3\ 8\ 3\ 2\ 7\ 9\ \ldots$

$s_9 = 0,\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ \ldots$

$s_{10} = 0,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ \ldots$

$\vdots$

$s = 0,\ 4\ 7\ 3$

-

Examples

$s_1 = 0,\ 3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 7\ 0\ 6\ 7\ 9\ \ldots$

$s_2 = 0,\ 8\ 6\ 2\ 8\ 0\ 3\ 4\ 8\ 2\ 5\ \ldots$

$s_3 = 0,\ 0\ 6\ 2\ 8\ 6\ 2\ 0\ 8\ 9\ 9\ \ldots$

$s_4 = 0,\ 5\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 8\ 1\ 6\ 4\ \ldots$

$s_5 = 0,\ 5\ 8\ 2\ 0\ 9\ 7\ 4\ 9\ 4\ 4\ \ldots$

$s_6 = 0,\ 6\ 9\ 3\ 9\ 9\ 3\ 7\ 5\ 1\ 0\ \ldots$

$s_7 = 0,\ 5\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4\ 1\ 9\ 7\ 1\ \ldots$

$s_8 = 0,\ 2\ 6\ 4\ 3\ 3\ 8\ 3\ 2\ 7\ 9\ \ldots$

$s_9 = 0,\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ \ldots$

$s_{10} = 0,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ \ldots$

$\vdots$

$s = 0,\ 4\ 7\ 3\ 4$

Examples

$s_1 = 0,\ 3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 7\ 0\ 6\ 7\ 9\ \ldots$

$s_2 = 0,\ 8\ 6\ 2\ 8\ 0\ 3\ 4\ 8\ 2\ 5\ \ldots$

$s_3 = 0,\ 0\ 6\ 2\ 8\ 6\ 2\ 0\ 8\ 9\ 9\ \ldots$

$s_4 = 0,\ 5\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 8\ 1\ 6\ 4\ \ldots$

$s_5 = 0,\ 5\ 8\ 2\ 0\ 9\ 7\ 4\ 9\ 4\ 4\ \ldots$

$s_6 = 0,\ 6\ 9\ 3\ 9\ 9\ 3\ 7\ 5\ 1\ 0\ \ldots$

$s_7 = 0,\ 5\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4\ 1\ 9\ 7\ 1\ \ldots$

$s_8 = 0,\ 2\ 6\ 4\ 3\ 3\ 8\ 3\ 2\ 7\ 9\ \ldots$

$s_9 = 0,\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ \ldots$

$s_{10} = 0,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ \ldots$

$\vdots$

$s = 0,\ 4\ 7\ 3\ 4\ 0\ 4\ 2\ 3\ 5\ 6\ \ldots$

Liczba s różni się od liczby s_1 przynajmniej pierwszą pozycją po przecinku, od liczby s_2 drugą, analogicznie s różni się od s_k pozycją k. Prowadzi to do wniosku, że powstała właśnie nowa liczba, nie znajdująca się w zbiorze A, wbrew pierwotnemu założeniu, że A zawiera wszystkie liczby z przedziału $]0, 1[$. Powyższa sprzeczność prowadzi do wniosku, że zbiór $\mathbb{R}$ jest istotnie większy od $\mathbb{N}$.

Definicja

Liczebność $\mathbb{N}$ oznacza się symbolem $\aleph_0$, zaś moc zbioru $\mathbb{R}$ to continuum, oznaczane $\mathfrak{c}$ (fraktura c).

Bonus - Dowód $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Rozważmy czy zbiór $Z =]0,1]$ jest równoliczny ze zbiorem $]0,1] \times]0,1]$.
Określmy funkcję, która jednemu elementowi z Z przyporządkowuje jeden element z $Z \times Z$.
Zapiszmy każdy element należący do Z w postaci ułamka dziesiętnego o nieskończonym rozwinięciu. Te, które zwykle mają rozwinięcie skończone zapisujemy jako np.:
$\frac{1}{2} = 0,4999999999999999999\ldots$
Każdą z liczb ze zbioru Z można zapisać w postaci:
$z = 0,\ \ a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3\ b_3 \ldots$
Gdzie:
$a_n, b_n = \underbrace{00000}_{k} c,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$
Interesująca nas funkcja jest postaci:
$f\ :\ \ Z \to \{(a,b) \in Z \times Z\ \ :\ \ a = a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ \ ,\ \ b = b_1\ b_2\ b_3 \ldots\}$

Examples

Zobrazujmy tę metodę na liczbie:

$z_n = 0,12946000045600060003400257015 62007\dots$

Podzielmy ją na poprzednio zdefiniowane wyrazy.

$z_n = 0,1|2|9|4|6|00004|5|6|0006|0003|4|002|5|7|01|5|6|2|007|\dots$

Zatem liczby a_n i b_n są równe:

$a_n = 0,1|9|6|5|0006|4|5|01|6|007|\dots$

$b_n = 0,2|4|00004|6|0003|002|7|5|2|\dots$

Nie ulega wątpliwości, że obie te liczby należą do Z.

Pozostaje jedynie rozważyć, czy przedstawiona funkcja jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem przedziału Z w $Z \times Z$

Rozważmy dwie sytuacje:
1) Dwie różne liczby z Z mają przyporządkowaną taką samą parę z $Z \times Z$.
2) Dwie różne pary z $Z \times Z$ mają przyporządkowana taka samą liczbę z Z.
1) W przypadku gdy liczby są różne, różnią się przynajmniej jednym wyrazem. Implikuje to, że pewien wyraz z liczby a lub b jest różny od odpowiadającego wyrazu odpowiedniej liczby drugiej pary. Otrzymujemy sprzeczność.
2) W przypadku gdy pary są różne, różnią się przynajmniej jednym wyrazem z liczby a lub b. Implikuje to, że liczba stworzona z pierwszej pary różni się przynajmniej jednym wyrazem od liczby stworzonej z drugiej pary. Otrzymujemy sprzeczność.
Powyższe sprzeczności dowodzą, że funkcja ta jest rzeczywiście wzajemnie jednoznaczna, co kończy dowód.

Pozostaje znaleźć bijekcję Z na $\mathbb{R}$.
Można ją określić jako złożenie bijekcji $]0,1]$ na $]0,1[$ z bijekcją $]0,1[$ na $\mathbb{R}$. Druga z nich jest trywialna, natomiast pierwszą można zapisać.

Źródła

Wikipedia:
1) Metoda Przekątniowa
2) Uncountable Set
3) Cantor's diagonal argument

Wykłady ze Wstępu do Matematyki, W. Guzicki P. Zakrzewski, PWN, Warszawa 2012