MIKOŁAJ MIĘKUS

Zad. 31a)

Zbadać, czy zbiór A_p jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny w przestrzeni metrycznej (X, d) $X = \mathbb{R}$

$$A_p = \{ x \in \mathbb{R} : xe^{x-x^2} \leq p \}$$

Zdefiniujmy funkcję $f(x) = xe^{x-x^2}$, która po przyrównaniu do parametru p wskaże nam zbiory z rodziny A_p.

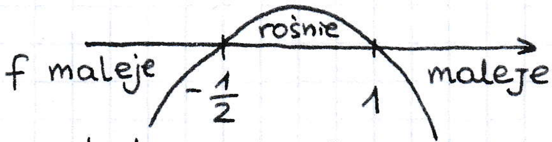
Narysujmy wykres $f(x)$, żeby nierówność $f(x) \leq p$ rozwiązać graficznie.

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Miejsca zerowe: $x \cdot e^{x-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Monotoniczność:

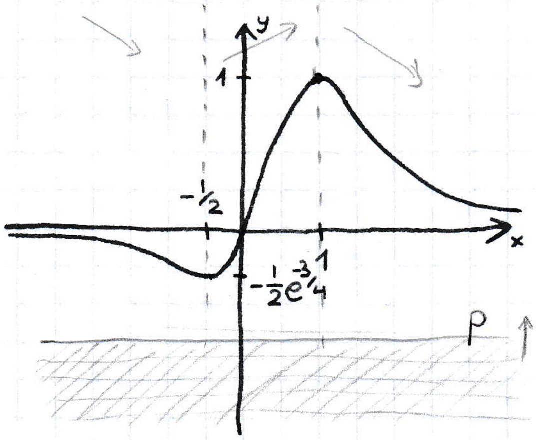
$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-x^2} + x(e^{x-x^2})' = e^{x-x^2} + xe^{x-x^2}(1-2x) =$$
$$= e^{x-x^2}(-2x^2 + x + 1) = \underbrace{e^{x-x^2}}_{>0}(1-x)(2x+1) \geq 0$$



$$f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = -\tfrac{1}{2}e^{-3/4}$$
$$f(1) = e^{1-1} = 1$$

Granice w nieskończonościach:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot e^{x-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2-x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\underbrace{e^{x^2-x}(2x-1)}_{\pm\infty}} = 0$$



(1) dla $p < -\frac{1}{2}e^{-3/4}$ $A_p = \emptyset$ - otwarty, domknięty, spójny, zwarty

(2) dla $p = -\frac{1}{2}e^{-3/4}$ $A_p = \{-\frac{1}{2}\}$ - domknięty, spójny, zwarty

(3) dla $p \in]-\frac{1}{2}e^{-3/4}, 0[$ $A_p = [r, s]$ - domknięty, spójny, zwarty

(4) dla $p = 0$ $A_p =]-\infty, 0]$ - domknięty, spójny, niezwarty → bo nieograniczony

(5) dla $p \in]0, 1[$ $A_p =]-\infty, t] \cup [u, +\infty[$ - domknięty, niespójny, niezwarty

(6) dla $p \geq 1$ $A_p = \mathbb{R}$ - otwarty, domknięty, spójny, niezwarty

$r, s, t, u \in \mathbb{R}$