Zadania z Analizy II R
Operatory liniowe i ich normy - 13 marca

Zadanie 1

(MKo i MW)
Ustalmy $t_0 \in [-1, 1]$. Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C[-1, 1]$ funkcjonał ewaluacji $\phi : X \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x(t_0)$ nie jest ciągły w normie $\|x\|_1 = \int_{-1}^{1} |x(t)|dt$, natomiast jest ciągły dla normy $\|x\|_\infty = \sup |x(t)|$.

Zadanie 2

(PS i SK)
Niech $X_0 := C[0, 1]$ oraz $X_1 := C^1[0, 1]$. Zbadać ciągłość (i ewentualnie obliczyć normę) operatora różniczkowania $D : X_1 \to X_0$, $Dx = \dot{x}$, jeśli w X_0 i X_1 normy są zadane wzorami:
a) $\|x\|_1 := \int_0^1 |x(t)|dt$, $\|y\|_0 = \int_0^1 |y(t)|dt$;
b) $\|x\|_1 := \sup |x(t)| + \sup |\dot{x}(t)|$, $\|y\|_0 = \sup |y(t)|$.

Zadanie 3

(MR i SŻ) Zbadać, czy operator liniowy $F : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ dany wzorem

$$F(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots)$$

jest ograniczony. Jeśli tak, znaleźć jego normę. Zbadać, czy operator $F^{-1} : \mathrm{im}F \to \ell^1(\mathbb{N})$ jest ograniczony.

Zadanie 4

(WC i PT)
Znaleźć normę operatora

$$F(x) := \begin{bmatrix} 3 & -4 & 11 \\ 5 & 2 & -6 \end{bmatrix} x$$

jeśli normy w $X = \mathbb{R}^3$ i $Y = \mathbb{R}^2$ dane są wzorami:
a) $\|x\| = \max |x_i|$, $\|y\| = \max |y_i|$;
b) $\|x\| = \max |x_i|$, $\|y\| = \sum_i |y_i|$.

Zadanie 5

(MG i MKu)
Niech Y będzie dowolną skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną. Niech na $\mathbb{R}^n$ zadana będzie norma ℓ^1. Niech $F : \mathbb{R}^n \to Y$ będzie operatorem liniowym. Udowodnić, że F ograniczony i $\|F\| = max_j \|Fe_j\|$, gdzie e_j to baza standardowa $\mathbb{R}^n$.