

Zadania z Analizy II R

Przestrznie Banacha - 10 marca

Zadanie 1

Pokazać, że przestrzeń

$$l^p := \left\{ \text{zbiór ciągów } (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} \text{ takich, że } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

jest zupełna.

Zadanie 2

Niech X będzie przestrzenią Banacha a K zbiorem zwartym. Pokazać, że przestrzeń funkcji ciągłych z K w X (ozn. $C(K, X)$) z normą $\|f\| = \sup_{t \in K} \|f(t)\|_X$ jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 3

Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C^1[0, 1]$ normy $\|x\|_1 := \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |\dot{x}(t)|$, $\|x\|_2 := |x(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |\dot{x}(t)|$ oraz $\|x\|_3 := \int_0^1 |x(t)| dt + \sup_{t \in [0, 1]} |\dot{x}(t)|$ są równoważne. Dowieść, że przestrzeń X jest zupełna względem tych norm.

Zadanie 4

Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C[a, b]$ norma $\|x\|_{\infty} := \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ jest mocniejsza od normy $\|x\|_1 := \int_a^b |x(t)| dt$, to znaczy, że istnieje stała $C_0 > 0$ taka, że $\|x\|_1 \leq C_0 \|x\|_{\infty}$ dla każdego $x \in X$ natomiast nie istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|x\|_{\infty} \leq C \|x\|_1$ dla każdego $x \in X$.