Bijekcje

Oskar Grocholski

1 $(0,1) \to [0,1)$

Weźmy ciąg określony wzorem

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n+1} \text{ dla } n > 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Funkcja bijektywna jest zdefiniowana następująco:

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ dla } x \neq a_n \\ f(x) = a_{n-1} \text{ dla } x = a_n \end{cases}$$

1.1 Dowód, że funkcja jest injekcją

$f(x_1) = f(x_2)$. Zauważmy, że w takim razie obydwa argumenty x_1 jak i x_2 należą albo nie należą do a_n (wartości funkcji zgodnie z definicją należą do a_n wtedy i tylko wtedy, gdy argument należy do a_n). Jeżeli oba argumenty nie należą do ciągu, to zgodnie z definicji są sobie wówczas równe. Jeżeli zaś należą do a_n, to ze względu na to, że jest on różnowartościowy, także dochodzimy do wniosku, że $x_1 = x_2$. qed

1.2 Dowód, że funkcja jest surjekcją

Dla y należącego do $[0,1)$, który należy do a_n zachodzi $f(a_{n+1}) = y$. W przeciwnym wypadku zachodzi $f(y) = y$. Ponieważ 0 należy do ciągu, a każda wartość ciągu dla $n > 0$ należy do $(0,1)$, to każdy element przeciwdziedziny ma przypisany element dziedziny. qed

2 $(0,1) \to [0,1]$

Będziemy postępować analogicznie, jak poprzednio, ale z drobnymi modyfikacjami:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n+1} \text{ dla } n > 1 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Funkcja bijektywna jest zdefiniowana następująco:

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ dla } x \neq a_n \\ f(x) = a_{n-2} \text{ dla } x = a_n \end{cases}$$

Dowód jest taki sam jak poprzedni