Zadania z Analizy II R
Różniczkowanie złożeń odwzorowań - 17 marca

Zadanie 1

(MR i SK)
Niech $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Sprawdzić, że

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \exists g \in C^1(0,\infty) : f(x,y) = g(x^2+y^2).$$

Zadanie 2

(PS i MW)
Niech $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $p \in \mathbb{R}$. Dowieść, że

$$(1+x^2)u'_x - 2pxyu'_y = 0 \iff [u \text{ jest postaci } u(x,y) = \phi(y(1+x^2)^p)]$$

gdzie $\phi \in C^1(\mathbb{R})$.

Zadanie 3

(MKo i SŻ - pierwsze dwa podpunkty, WC i MKu - ostatnie dwa podpunkty)
Niech u będzie funkcją klasy C^2 na obszarze $\emptyset \in \mathbb{R}^3$, zaś funkcje $U = U(\rho, \phi, z)$ i $\tilde{U} = \tilde{U}(r, \theta, \phi)$ jej przedstawieniami we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych. Wyprowadzić wzory:
(1)$|\nabla u|^2 = (U'_\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2}(U'_\phi)^2 + (U'_z)^2$;
(2)$\Delta u = U''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U'_\rho + U''_{zz} + \frac{1}{\rho^2}U''_{\phi\phi}$;
(3)$|\nabla u|^2 = (\tilde{U}'_r)^2 + \frac{1}{r^2}(\tilde{U}'_\theta)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\tilde{U}'_\phi)^2$;
(4)$\Delta u = \tilde{U}''_{rr} + \frac{1}{r^2}\tilde{U}''_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\tilde{U}''_{\phi\phi} + \frac{2}{r}\tilde{U}'_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\tilde{U}'_\theta$.
Tutaj f'_x oznacza pierwszą pochodną funkcji f po z zaś f''_{xx} druga pochodną funkcji f po z.

Zadanie 4

(MG i PT)
Niech $u = u(x,y)$ będzie funkcją klasy C^2 na pewnym obszarze w $\mathbb{R}^2$, a $U = U(\rho,\phi)$ jej przedstawieniem we współrzednych biegunowych. Wyrazić wielkość $L := \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)$ we współrzędnych kartezjańskich ($x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi$).