Zadania z Analizy II R
Różniczkowanie w przestrzeniach Banacha - 20 i 24 marca

Zadanie 1

(MKo)
Dana jest funkcja $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$. W kierunku jakich wektorów jednostkowych $\vec{a}$ pochodna kierunkowa $\nabla_{\vec{a}} f(1,-2)$ osiąga największa i najmniejszą wartość?

Zadanie 2

(SK)
Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana będzie przez

$$f(x,y) := \begin{cases} x + y + \frac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Udowodnić, że f jest ciągła i ma pochodne cząstkowe w dowolnym punkcie $\mathbb{R}^2$, ale nie jest różniczkowalna (w punkcie $(0,0)$). Pokazać, że f ma pochodne kierunkowe w $(0,0)$ we wszystkich kierunkach.

Zadanie 3

(kolejne punkty MR, PS, MW i MG)
Zbadać różniczkowalność następujących funkcji:
a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
b) $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$;
c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$;
d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$.

Zadanie 4

(MKu i WC)
Na $X = C[0,1]$ z normą supremum określmy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) := \int_0^1 t^2 x(t) x(1-t) dt$.
a) Dla $x, h \in X$ znaleźć pochodną kierunkową $\nabla_h f(x)$.
b) Zbadać różniczkowalność f.

Zadanie 5

(PT i SŻ)
Na $X = C[0,1]$ z normą supremum określmy funkcję $f : X \to X$ wzorem $f(x) := |x|$.
a) Sprawdzić, że jeśli zbiór $Z_x = \{t \in [0,1] : x(t) = 0\}$ jest niepusty, to nie dla wszystkich $h \in X$ pochodną kierunkową $\nabla_h f(x)$ istnieje.
b) Pokazać, że dla każdego $x \in X$ takiego, że $Z_x = \emptyset$ funkcja f ma mocną pochodną w x.