Pierwsze kolokwium z Analizy I R

4 listopada 2019

Uwagi organizacyjne: Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każdą kartkę należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a niedozwolone pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Niech

$$A_n := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad (x-2)^2 + n(3-y) \leqslant 0\right\},\ n \in \mathbb{N}_+$$

Znaleźć i opisać zbiory $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Uwaga: rysunek może być pomocny, jednak nie jest wystarczającą formą odpowiedzi.

Zadanie 2. Niech $X := [-1, 1]$ oraz

$$\mathcal{R} := \left\{(x, y) \in X \times X \mid \quad x - y \in \mathbb{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Sprawdzić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności w zbiorze X, znaleźć klasy $\left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{4}\right]$ oraz narysować zbiór $\mathcal{R}$.

Zadanie 3. Obliczyć granice (lub wykazać rozbieżność) ciągów:

(a) $a_n := \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n^n + (n+1)^n + \cdots + (n+n)^n}$,

(b) $b_n := \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + p}{1+p}\right)^n,\ a > 0,\ 1 + p > 0$,

(c) $c_n := \dfrac{n \cdot 3^n + n^2 \cdot 2^n}{n! - 5 \cdot 7^n}$,

(d) $d_n := \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{2n+1}\right)$.

Zadanie 4. Udowodnić, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$ zachodzi nierówność $(n!)^2 \geqslant n^{n+1}$.

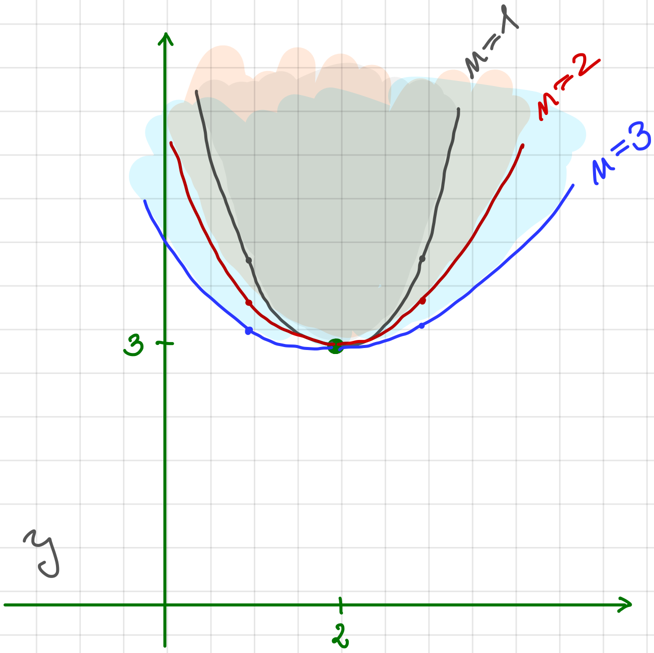
Powodzenia !!!

Katarzyna Grabowska
Paweł Kasprzak
Marcin Kościelecki
Jacek Krajczok

ZADANIE 1.

$$A_n := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \ (x-2)^2+n(3-y)\leqslant 0\},\ n\in\mathbb{N}_+$$

$$(x-2)^2+3n-ny\leqslant 0$$
$$(x-2)^2+3n\leqslant ny$$
$$\frac{1}{n}(x-2)^2+3\leqslant y$$



Zauważmy, że $A_n\subset A_{n+1}$.
Istotnie, jeśli $(x,y)\in A_n$, tzn
$$\frac{1}{n}(x-2)^2+3\leqslant y$$
to także $(x,y)\in A_{n+1}$ gdyż
$$\frac{1}{n+1}(x-2)^2\leqslant\frac{1}{n}(x-2)^2\leqslant y$$
W tej sytuacji $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{(x,y): (x-2)^2+3\leqslant y\}$ tzn obszar nad parabolą o równaniu $y=3+(x-2)^2$ wraz z brzegiem.

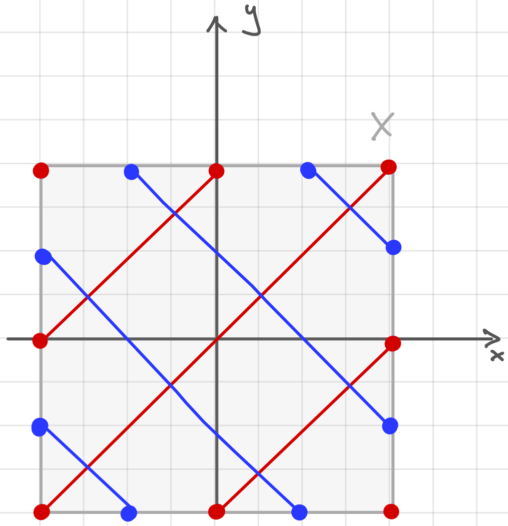
Z definicji sumy zbiorów wynika, że
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{(x,y): \underbrace{\exists n\in\mathbb{N}: (x-2)^2+n(3-y)\leqslant 0}\} = *$$

Analizujemy warunek : $(x-2)^2\leqslant n(y-3)$. Jeśli $y-3<0$ dla żadnego n nie znajdziemy (x,y) spełniających nierówność. Lewa strona jest bowiem nieujemna. Gdy $y=3$, tzn prawa strona jest 0, dostajemy rozwiązanie $x=2$ $y=3$ dla dowolnego n. gdy $y>3$ możemy podzielić obie strony nierówności przez $(y-3)$
$\frac{(x-2)^2}{y-3}\leqslant n$ Dla ustalonych (x,y) zawsze znajdziemy $n\in\mathbb{N}$ spełniające tę nierówność.

$$* = \{(x,y): y>3\}\cup\{(2,3)\}$$

ZADANIE 2

$\mathcal{R} := \left\{(x,y) \in X \times X : x - y \in \mathbb{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\right\}$



$x - y \in \mathbb{Z}$ tzn $x - y = k$ $y = x - k$

$x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ tzn $x + y + \frac{1}{2} = l$ $y = -x + l - \frac{1}{2}$

R składa się więc z przecięcia kwadratu $[-1,1] \times [-1,1]$ z sumą prostych o równaniach

$y = x$ $y = x + 1$ $y = x - 1$ $y = x + 2$ $y = x - 2$

$y = -x + \frac{1}{2}$ $y = -x + \frac{3}{2}$ $y = -x - \frac{1}{2}$ $y = -x - \frac{3}{2}$

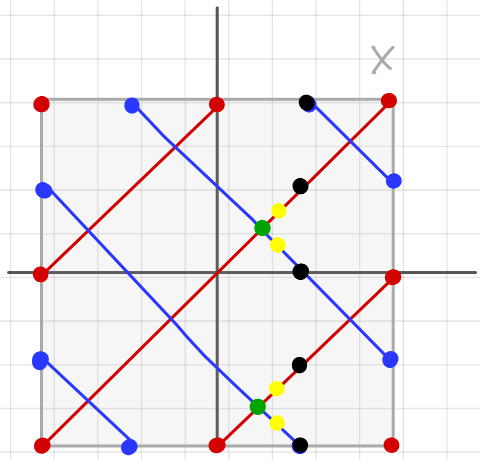
Relacja jest zwrotna, gdyż $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, symetryczna, gdyż jeśli $x - y \in \mathbb{Z}$ to także $y - x \in \mathbb{Z}$ oraz jeśli $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ to także $y + x + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Przechodniość sprawdzamy rozpatrując trzy przypadki:

(1) $x - y = k$ i $y - z = l \Rightarrow x - z = k + l \in \mathbb{Z}$

(2) $x + y + \frac{1}{2} = k$ $y + z + \frac{1}{2} = l$ $\Rightarrow x - z = k - l \in \mathbb{Z}$ ok

(3) $x - y = k$ i $y + z + \frac{1}{2} = l \Rightarrow x + z + \frac{1}{2} = k + l \in \mathbb{Z}$ ok.



- $[\frac{1}{2}] = \{\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -1, 0\}$
- $[\frac{1}{3}] = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\}$
- $[\frac{1}{4}] = \{\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$

ZADANIE 3

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n + (n+1)^n + \ldots + (n+n)^n}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n \cdot n^n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(2n)^n}$$

$$\underset{\sqrt[n]{n}}{\overset{\|}{}} \sqrt[n]{n} \leq a_n \leq 2\sqrt[n]{n} \quad \text{— ciąg jest ograniczony}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^n n^n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{n \cdot 2^n n^n}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^n n^n} = 2, \qquad \frac{1}{n}\sqrt[n]{n \cdot 2^n n^n} = 2\cdot\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ na podstawie tw. o trzech ciągach.

$$b_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+p}{1+p}\right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{e}-1}{1+p}\right)^n$$

badamy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{1+p} = \dfrac{\log(a)}{1+p}$ (fakt z ćwiczeń)

$$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\frac{\log(a)}{1+p}\right) = a^{(1+p)}$$

$$c_n = \frac{n3^n + n^2 2^n}{n! - 7\cdot 5^n}$$

$\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (co powinno być wiadome z ćwiczeń)

$$\underbrace{\frac{n2^n}{n!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \leq c_n \leq \underbrace{\frac{n^2 3^n}{\frac{1}{2}n!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

nierówności zachodzą dla dostatecznie dużych n.

$c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (trzy ciągi)

(d) $d_n := \Pi_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)$.

$$d_n = \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\left(1-\frac{3}{2n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{(2n+1-1)(2n+1-2)(2n+1-3)\dots(2n+1-n)}{(2n+1)^n} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(2n+1)^n}$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+3)^{n+1}} \cdot \frac{n!\,(2n+1)^n}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \underbrace{\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 2}\underbrace{\left(1-\frac{2}{2n+3}\right)^n}_{\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{2n+3}\right)=\frac{1}{e}} \longrightarrow \frac{2}{e}$$

Skoro $d_{n+1}/d_n \longrightarrow 2/e < 1$ to dla dostatecznie dużych n

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} < \alpha < 1 \qquad d_{n+1} < \alpha d_n < \alpha^2 d_{n-1} < \dots < \alpha^{n-N} d_{N+1}$$

$$d_{n+1} < \underbrace{\alpha^n}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \frac{d_{N+1}}{\alpha^N} \text{ const}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

ZADANIE 4.

$(n!)^2 \geqslant n^{n+1}.$

Dowód prowadzimy metodą indukcji matematycznej. Sprawdzamy zatem prawdziwość warunku dla $n=7$

$$(7!)^2 \overset{?}{\geqslant} 7^8$$

$$7! \overset{?}{\geqslant} 7^4$$

nierówność zachodzi!

$$\underbrace{2\cdot 3}_{6}\cdot\underbrace{4\cdot 5}_{20}\cdot 6\cdot\cancel{7} \geqslant \underbrace{7\cdot 7}\cdot 7\cdot\cancel{7}$$

$$36\cdot 20 = 720 \longleftrightarrow 49\cdot 7 = 280+63 = 343$$

Wykonujemy krok indukcyjny:

Załóżmy, że warunek zachodzi dla pewnego $n\in\mathbb{N}$.
Sprawdzamy warunek dla $n+1$

$$\left((n+1)!\right)^2 \overset{?}{\geqslant} (n+1)^{n+2}$$

$$(n!)^2\cancel{(n+1)^2} \overset{?}{\geqslant} (n+1)^{n-1}\cancel{(n+1)^2}$$

$$(n!)^2 \overset{?}{\geqslant} (n+1)^{n-1}$$

ta nierówność jest równoważna dowodzonej

$$(n!)^2 \geqslant n^{n+1} \geqslant (n+1)^{n-1}$$

założenie indukcyjne

to trzeba pokazać

$$n^{n+1} \geqslant (n+1)^{n-1} \iff \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n-1}} \geqslant 1 \iff n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \overset{*}{\geqslant} 1$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} > \frac{1}{3}$$

Dla dostatecznie dużych n $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{3}$

zatem $n^2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{n^2}{3} > 1$

Powstaje więc pytanie czy $n=7$ jest już dostatecznie duże.

Ciąg $(1-\frac{1}{n})^n$ jest od pewnego miejsca monotoniczny:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{n+1} \overset{-1/n+1/n}{}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\frac{n+1-n}{(n+1)n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\frac{1}{(n+1)n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n} = 1$$

nierówność Bernoulliego zachodzi gdy $\frac{\frac{1}{(n+1)n}}{1-\frac{1}{n}}$ jest >-1

$$\frac{1}{(n+1)\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{(n-1)} = \frac{1}{(n+1)(n-1)}$$ wystarczy więc $n>1$

wystarczy więc znaleźć pierwsze takie n, żeby $n+1>1$ i

$$n^2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant 1$$

$n=1$ $\quad 1\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$

$n=2$ $\quad 4\left(1-\frac{1}{3}\right)^3 = 4\cdot\frac{8}{27} = \frac{32}{27} > 1.$

(*) Zachodzi dla $n \geqslant 2$, zatem krok indukcyjny jest wykonalny w szczególności dla $n \geqslant 7$.