Zadania z Analizy II ind
Seria 1.

1. Niech X oznacza przestrzeń Banacha ograniczonych ciągów o wyrazach rzeczywistych z normą $||(x_1, \ldots, x_n, \ldots)|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Sprawdzić, że odwzorowanie $F : X \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ jest liniowe, ograniczone i injektywne, ale nie istnieje ograniczone odwzorowanie $G : X \to X$ takie, że $FG = id$.

2. Niech X będzie jak wyżej. Określmy odwzorowanie $F : X \to X$ wzorem $(Fx)_n := \frac{x_{n+1}}{n+1}$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} ||F^n||^{1/n} = 0$.

3. Niech X będzie przestrzenią wektorową wielomianów na $\mathbb{R}$ (o współczynnikach rzeczywistych). a) Czy X ma skończony wymiar? b) Wykazać, że wzór: $||a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n|| := max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}$ określa na X normę. c) $(X, || \, ||)$ nie jest przestrzenią Banacha. (Wsk. rozważyć ciąg $W_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.) d) $A : X \ni a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto a_0 + \frac{a_1}{1} x + \ldots + \frac{a_n}{n} x^n \in X$ jest ograniczonym (czyli ciągłym) odwzorowaniem liniowym. e) Znaleźć odwzorowanie odwrotne i wykazać, że nie jest ono ograniczone (czyli nie jest ciągłe).

4. Zbadać różniczkowalność odwzorowań:
(a) $C[0,1] \ni f \mapsto f(1) + f(1/2)^2 \in \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \int_a^{x+y} f(t)dt \in \mathbb{R}$, $f-$ustalona f. ciągła; (c) $C[0,1] \ni f \mapsto T(f) \in C[0,1] : (Tf)(x) := \int_0^x (1 + f^2(t))dt$; (d) $C[0,1] \ni f \mapsto \int_0^1 \varphi(f(t))dt$, gdzie $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$;
(e) $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5. Sprawdzić, że funkcja $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest klasy C^1 na $\mathbb{R}^2$, posiada wszędzie pochodne cząstkowe rzędu 2 ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

6. Niech funkcje f, g, h, k będą rózniczkowalne. Wyrazić pochodne cząstkowe funkcji F przez pochodne cząstkowe funkcji f, g, h, k: (a) $F(x,y) := f(g(x) + h(y), g(x)h(y))$; (b) $F(x,y) := f(g(xy) + h(x+y), k(x))$; (c) $F(x,y,z) := f(g(x^y), h(y^z))$.

7. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji:
(a) $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$;
(b) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0 \, , \ y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := \log(x^2+y^2) - \arctan\frac{y}{x} + 2x + y$
(c) $\mathbb{R}^3_+ \ni (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := x + \frac{y^2}{4x} + \frac{2}{z} + \frac{z^2}{y}$
(d) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) := \frac{xy(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

8. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze Ω:
(a) $f(x,y) := x^2(4-x-y)$, $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \, , y \geq 0 \, , x+y \leq 6\}$
(b) $f(x,y) := x^2 - y^2$, $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$
(c) $f(x,y) := \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x,y \in [0, \frac{\pi}{2}]$
(d) $f(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - (x^2+2y^2+z^2)^2$, $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$
(e) $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$, $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2+4y^2 \leq 6\}$

9. Znaleźć najkrótszy odcinek łączący krzywe: $C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - xy + y^2 = 7\}$ oraz $C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : (x-1)^2 + (y^1)^2 = 25\}$.

10. Niech dane będą $\mathbb{N} \ni n > 2$ oraz dodatnie liczby $a_1, ..., a_n$. Wykazać, że funkcja $f(x) := \frac{a_1}{x_1} + ... + \frac{a_n}{x_n}$ przyjmuje na zbiorze $\{x \in R^n \ : \ x_1^2 + ... + x_n^2 = 1 \, , \, x_1, ..., x_n > 0\}$ wartość minimalną. Wyznaczyć tę wartość.

11. Zbadać lokalną i globalną odwracalność odwzorowań.
(a) $(x,y) \mapsto (\sin(x+y), e^{x+y})$;
(b) $(x,y) \mapsto (x^2+y^2, \log|\frac{y}{x}|)$;
(c) $(x,y) \mapsto (\frac{y^2}{x}, \sqrt{2x^2+y^2})$
(d) $C[0,1] \ni f \mapsto \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$ ($C[0,1]$ - p. Banacha z normą sup)

12. W równaniu różniczkowym dokonać wskazanej zamiany zmiennych:
(a) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, $(u,v,w(u,v)) := (x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z(x,y)})$
(b) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $(p,q) := (xy, \frac{x}{y})$
(c) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, $(u,v,w(u,v)) := (x^2+y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \log z(x,y) - (x+y))$

13. W obszarze $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ 0 < y < x\}$ wprowadzamy współrzędne $u(x,y) := x+y$, $v(x,y) := xy$. Zapisać wyrażenie

$$\mathcal{A}(f) := \frac{2}{(x-y)^2}\left(\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) + \frac{1}{x-y}(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

w zmiennych (u,v).

14. Rozwiązać równanie $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xz^2$, wyrażając je w nowych współrzędnych $u = x, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{1+xz}$ obszaru $\Omega = \{(x,y,z) : x, y > 0\}$ oraz traktując w jako zmienną zależną $w = w(u,v)$.

15. Rozwiązać równanie $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, wyrażając je w nowych współrzędnych $u = x^2 + y^2$, $v = \log\frac{y}{x}$, $w = x + y - \log z$ obszaru $\Omega := \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$, traktując w jako nową zmienną zależną $w(u,v)$.

16. Dokonując liniowej zamiany zmiennych sprowadzić równanie: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = g$ do postaci: $a\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + c\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = g$.

17. Niech $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie Laplace'a: $\Delta f = 0$ oraz $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 spełniają równania: $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$. Wykazać, że $g(x,y) := f(u(x,y), v(x,y))$ spełnia równanie Laplace'a.

18. Niech $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Podać warunki, aby równanie : $2x - y = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ określało funkcję $z = z(x,y)$. Pokazać, że $z\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y$.

19. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Podać warunki, aby równanie : $\phi(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ określało funkcję $z = z(x,y)$. Pokazać, że $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$

20. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x,y) \mapsto z(x,y)$ zadanych równaniami:
(a) $z^3 + z + \frac{14xz}{1+x^2} + (2x-y)^2 + 9 = 0$
(b) $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \quad a \in R\ a \neq 0$
(c) $2z^3 + \frac{6z}{1+x^2} + 5x - xy + y = 0$
(d) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 8yz - 6x + 8y = 0$
(e) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2$ (f) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + 1$ (g) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + z + 1$.