

Zadania domowe z Analizy IR. Seria 1. 22.10.2019

1. Wyznaczyć i narysować zbiory

$$P = \bigcup_{t \in [0,1]} A_t, \quad Q = \bigcap_{t \in [0,1]} A_t \quad \text{dla} \quad A_t = [t, 2t+1] \times [-t, t+1]$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, oraz ciąg $(b'_1, \dots, b'_n)$ różni się od ciągu $(b_1, \dots, b_n)$ jedynie kolejnością, to $\sum_{k=1}^n a_k b_k > \sum_{k=1}^n a_k b'_k$.

3. Niech (x_n) będzie ciągiem określonym następującymi warunkami: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{5}{4-x_n}$. Wykazać (na przykład indukcyjnie), że

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{2n} = \frac{5 - x_n^2}{4 - 2x_n}.$$

4. Dowieść, że liczby Fibonacciego, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ mogą być otrzymane ze wzoru

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{k}.$$

Należy pamiętać, że $\binom{n-k}{k} = 0$ zawsze jeśli $n-k < k$. Z definicji, dla $m > k$ $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$.

5. Ile jest podzbiorów $P \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ spełniających warunek

$$\forall k, l \in P \quad |k - l| > 1 \text{ lub } k = l.$$

6. Niech R i Q będą relacjami równoważności w zbiorze X . Czy $R \cup Q$, $R \cap Q$ są relacjami równoważności?

7. Niech r będzie relacją z A do B i q relacją z B do C . Definiujemy złożenie $q \circ r$ tych relacji jako relację z A do C daną następującym warunkiem: $a \in A$ jest w relacji $q \circ r$ z $c \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $b \in B$ takie, że a jest w relacji r z b i b jest w relacji q z c . Czy złożenie relacji równoważności jest relacją równoważności?

8. Wykazać, że $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

9. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności: $2n+1 < 2^n$; $3n^3+1 < 2^n$; $n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!! \leq 2^{n-2}n!$?

10. Niech $a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{R}$ — dane liczby, $s := |a_1 + a_2 + \dots + a_{100}|$. Dowieść, że istnieje permutacja $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ liczb $a_1, \dots, a_{100}$, taka że $|b_1| \geq \frac{1}{100}s$, $|b_1 + b_2| \geq \frac{2}{100}s$, $|b_1 + b_2 + b_3| \geq \frac{3}{100}s, \dots, |b_1 + b_2 + \dots + b_{99}| \geq \frac{99}{100}s$.

11. Uprościć warunek:

- (a) $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$; (b) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;
(d) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$; (e) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$; (f) $A \setminus B = B \setminus A$; (g) $A \cap B = (A \cup C) \cap (B \setminus C)$.

12. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

- (a) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$; (b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;
(c) $A \setminus (B \cup C \cup D) = ((A \setminus B) \setminus C) \setminus D$; (d) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup (A \cap C \setminus D)$.

13. Niech $A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (różnica symetryczna zbiorów). Wykazać, że: działanie $\div$ jest przemienne i łączne; $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$; $A \div A = \emptyset$; $A \div \emptyset = A$; $A_1 \div A_2 \div \dots \div A_n = \{x \in X : x \text{ należy do nieparzystej liczby zbiorów } A_1, \dots, A_n\}$. Wyrazić sumę i różnicę mnogościową zbiorów poprzez operacje $\cap$ i $\div$.

14. Wykazać, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x + y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$, jest bijektywne, wyliczyć f^{-1} .

15. Wyliczyć:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n} \right]; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10} \right]; \quad \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - r)^2 + (x_2 + 2r)^2 \leq r^2 + 1\};$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} ([0, n] \cup [n^2, \infty)); \quad \text{(e) } \bigcup_{t \in [2, 3]} A_t \text{ oraz } \bigcap_{t \in [2, 3]} A_t, \text{ gdzie } A_t := [t, 2t] \times [-t, t];$$

$$\text{(f) } \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2}, \frac{1}{n+1} \right]; \quad \text{(g) } \bigcap_n A_n, \quad \liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ i } \bigcup_n A_n, \text{ jeśli}$$

$$A_n := \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1} \right] \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

16. Niech $A_n \subset X$, $A'_n := X \setminus A_n$. Wykazać, że $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k < n} A_k \cup \bigcup_{k \geq n} A'_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$.
17. Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{1}{n} + Q\left(\frac{n}{3}\right), \frac{3n+1}{2n-1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $Q(x) := x - E(x)$.
18. Dla $s \geq 0$ oznaczmy $K_s := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - s)^2 \leq s\}$. Wykazać, że mają miejsce następujące zawierania: $\{(x, y) : y \geq x^2\} \subset \bigcup_{s \in \mathbb{N}} K_s \subset \bigcup_{s \in]0, \infty[} K_s = \{(x, y) : y \geq x^2 - \frac{1}{4}\}$.
19. Określmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^3$: $S := \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 > 0, z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}) \text{ lub } (x = y = 0, |z| \leq 1)\}$, $S_1 := \{(x, y, z) : |z| \leq 1, y = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}}x\}$, $S_2 := \{(x, y, z) : |z| \leq 1, x = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}}y\}$. Dowieść, że $S = S_1 \cup S_2$ oraz wyznaczyć $S_1 \cap S_2$.
20. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $f : X \rightarrow]0, \infty[$ — dowolną funkcją. Wykazać, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz parami różne elementy $x_1, \dots, x_n \in X$, takie że $f(x_1) + \dots + f(x_n) > 100$.
21. Wykazać, że $\bigcap (A_n \cup B_n) \supset (\bigcap A_n) \cup (\bigcap B_n)$. Znaleźć przykład, gdy nie ma równości. Pokazać, że w przypadku, gdy oba ciągi są *zstępujące* (tzn. $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n, B_{n+1} \subset B_n$), powyższa inkluzja przechodzi w równość.
22. Niech $\emptyset \neq X$ będzie zbiorem skończonym oraz $f : X \rightarrow X$. Wykazać, że:
 (a) $R := \{(x, y) \in X \times X : \exists k, l \in \mathbb{N} : f^k(x) = f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w X ;
 (b) zbiór $X_0 := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_0) = X_0$ oraz $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow X_0$ jest bijekcją;
 (c) każda orbita $f|_{X_0}$ zawiera się w jednej z klas relacji R i każda z klas relacji R zawiera dokładnie jedną orbitę. Zatem $|X/R|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_0}$.
23. Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w R . Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S \subset R \times R$. Znaleźć funkcję $f : R \rightarrow R$, której poziomice są klasami równoważności:
 $x \sim y \iff (x - y)(1 - xy) = 0$; $x \sim y \iff (x = y \text{ lub } x = -y \in [-1, 1] \text{ lub } |x| + |y| = 1)$;
 (c) $x \sim y \iff (x = y \text{ lub } \exists n \in \mathbb{Z} : x, y \in [2n - 1, 2n])$; (d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbb{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$.
24. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie symetrycznym względem 0 przedziałem, a $X := \mathbb{R} \times I$. Sprawdzić, że relacja $(x, y) \sim (x', y') \iff [x' - x \in \mathbb{Z}, y' = (-1)^{x' - x}y]$ jest równoważnością w X . Zbiór $X/\sim$ nazywa się *wstęgą Möbiusa* — dlaczego?
25. Niech R będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1, 0, 1\}$. Określmy funkcję $d_R : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem:

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|, & \text{gdy } (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \in R \\ \|x\| + \|y\| & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}, \text{ gdzie } \|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^2.$$

 Wykazać, że: (a) $[d_R(x, y) = 0 \iff x = y] \iff R$ jest zwrotna; (b) $[d_R$ jest symetryczna, tzn. $d_R(x, y) = d_R(y, x) \forall x, y \in \mathbb{R}^2] \iff R$ jest symetryczna; (c) d_R spełnia nierówność trójkąta $\iff R$ jest przechodnia. Zatem: d_R jest metryką w $\mathbb{R}^2 \iff R$ jest relacją równoważności. (d_R ma nazwę “metryka-rzeka” — dlaczego?).
26. Niech R będzie relacją równoważności w X oraz $X_0 \subset X$. Wykazać, że
 $(X_0 \text{ jest sumą pewnych klas równoważności } R) \iff (\forall x, y \in X : [x \in X_0, (x, y) \in R] \Rightarrow y \in X_0)$.
27. Dane są odwzorowania $\alpha : X \rightarrow Y, \beta : Y \rightarrow Z, \gamma : Z \rightarrow W$. Wykazać, że:
 $[\beta \cdot \alpha \text{ iniektywne}] \Rightarrow \alpha \text{ iniektywne}; [\beta \cdot \alpha \text{ surjektywne}] \Rightarrow \beta \text{ surjektywne}; [\beta \cdot \alpha \text{ i } \gamma \cdot \beta \text{ są bijekcjami}] \Rightarrow \alpha, \beta$
 i γ również są bijekcjami.
28. Niech $\alpha : X \rightarrow Y, \beta : Y \rightarrow X, \gamma : X \rightarrow X$. Wykazać, że:
 $\alpha \text{ jest iniektywne} \iff \forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A)); \alpha \text{ jest surjektywne} \iff \forall B \subset Y : B = f(f^{-1}(B));$
 $[\alpha \cdot \gamma = \alpha, \alpha \text{ iniektywne}] \Rightarrow \gamma = \operatorname{id}_X; [\gamma \cdot \beta = \beta, \beta \text{ surjektywne}] \Rightarrow \gamma = \operatorname{id}_X; [\alpha \cdot \beta \text{ iniektywne}, \beta$
 $\text{surjektywne}] \Rightarrow \alpha \text{ iniektywne}; [\beta \cdot \alpha \text{ surjektywne}, \beta \text{ iniektywne}] \Rightarrow \alpha \text{ surjektywne}; [\forall x \in X : \exists n \in \mathbb{N} :$
 $\underbrace{\gamma \cdot \dots \cdot \gamma}_n(x) = x] \Rightarrow \gamma \text{ jest bijektywne}.$
29. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$; $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t + t^{-1}, t - t^{-1})$; $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) := az + \bar{z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ jest ustaloną liczbą, taką że $|a| = 1 \neq -a$;
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$; $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) := 2n^2 - 3n + 1$; $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} - y$.
30. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$? Wskazówka: nierówność Bernoulliego.

31. Dowieść, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy: $E(x) + y \geq 0 \iff x + E(y) \geq 0$. Podać przykłady pokazujące, że zastępując tu nierówności $\geq$ nierównościami $>$ lub $\leq$ otrzymamy zdania fałszywe. Dowieść, że $y \geq E(x) \iff E(y) > x - 1$.
32. Niech $E(x) := (\text{maksymalna liczba całkowita } \leq x)$. Narysować wykresy funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) - 3E(\frac{x}{3}) \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory: (a) $0 \leq E(x+y) - E(x) - E(y) \leq 1$; (b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$; (c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$; (d) $\sum_{n=1}^N E(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}) = E(x)$, jeśli liczba $N \in \mathbb{N}$ jest dostatecznie duża.
33. Wykazać, że dla $m, n \in \mathbb{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$; (b) jeśli $m \geq n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[n]{n}$.
Wskazówka: nierówność Bernoulliego.
34. Wykazać, że: $\frac{2n}{2n-1} \leq \sqrt[n]{2} \leq \frac{n+1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (nierówność Bernoulliego); (b) $2^n > n^{50}$ dla $n \geq 450$.
35. Wykazać, że: $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, $n \in \mathbb{N}$; $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
36. W n kolejnych latach wskaźnik inflacji przyjmował wartości $x_1, \dots, x_n$, tzn. w k -tym roku ceny rosły $(1+x_k)$ -krotnie. Napisać wzór na średni roczny wskaźnik inflacji za badany okres; wykazać, że jego wartość zawiera się pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną liczb $x_1, \dots, x_n$.
37. Wykazać, że: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n) = \frac{1}{100}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 4\sqrt{n^2 + n} - 2\sqrt{n^2 - n} - 3\sqrt{n^2 + 2n}) = \frac{5}{4}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2\sqrt{n^2 - n} + 2 - 3\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2n}) = -\frac{1}{4}$; (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^3 + \sqrt{n^5}}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^3}} \right) = \frac{1}{4}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)} \right) = \frac{7}{3}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p \right] = \frac{1}{2}pq(q-p)$ dla $p, q \in \mathbb{N}$; (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right) = 1$; (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5a^{2n} + 4a^n + 3} = \max\{1, a^2\}$ dla $a \in \mathbb{R}$; (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^7 + 7)^{-7} \sqrt{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}} = 30\sqrt{22}$; (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(3+x)^n + (1-x)^n} = 2 + |1+x|$ dla $x \in \mathbb{R}$; (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + \dots + p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n + \dots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \dots, a_r\}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p_1 a_1^n + \dots + p_r a_r^n]{n} = \max\{a_1, \dots, a_r\}$, jeśli $r \in \mathbb{N}$ i liczby p_i, a_i są dodatnie; (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[2]{2}-1} - \frac{2}{\sqrt[4]{4}-1} \right) = \frac{1}{2}$; (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) = 0$; (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) = +\infty$; (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+2} \dots \frac{n}{3n} = 0$; (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} n[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$; (q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 2$; (r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n} \right) = 1$; (s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \dots \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$; (t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \dots + n^4} = 1$; (u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2-3} \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k^2-2} = 1$.
38. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n}{n + (n-1) + \dots + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
39. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony, to ciąg (x_n) o wyrazach $x_n =: \frac{2^{n-1}a_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n}{2^{n-1} + \dots + 2 + 1}$ jest zbieżny. Wyliczyć $\lim x_n$, jeśli $a_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 2$. Wskazówka: $\tilde{x}_n := (1 - 2^{-n})x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.
40. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1 + \dots + a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n \searrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.
41. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Stolza:
(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6} - \frac{n}{6} \right) = \frac{1}{2}$;
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = 2(\sqrt{2} - 1)$; (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)}}{n} - \frac{n}{2} \right) = 1$;
(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$;
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$; (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{\sqrt[2n]{(2n)!}} = \frac{e^2}{2}$.
42. Dla danych liczb dodatnich a i b określmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n) , przyjmując: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} := \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n), (b_n)$ są zbieżne oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{ab} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
43. Wykazać zbieżność ciągu (a_n) , jeśli:
(a) $a_n := (1 + \frac{1}{1^2})(1 + \frac{1}{2^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^2})$; (b) $a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \sqrt{2n}$; (c) $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ (liczba $\lim a_n \approx 0.57721566$ nazywa się stałą Eulera); (d) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n+1}$.

44. Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie :
- (a) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{3}x_n^3$, $x_0 = 1$; (b) $x_{n+1} = \frac{\pi}{2} \sin x_n$, $x_0 = 1$; (c) $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$, $x_0 = 1$.
45. Dla podanych niżej ciągów obliczyć $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\liminf x_n$, $\limsup x_n$
- (a) $x_n = \frac{n-10}{n^2}$, (b) $x_n = \frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$, (c) $x_n = \frac{n-E(\sqrt{n})^2+1}{E(\sqrt{n})}$, (d) $x_n = n-10[\frac{n}{10}]+\frac{2}{n}$; (e) $x_n = n-\frac{5}{n}-5E(\frac{n}{5})$;
(f) $x_n = \frac{24}{n} + \frac{n}{10} - [\frac{n}{10}]$;
46. Dowieść (nie stosując twierdzenia Stolza), że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) = 0$.
47. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru:
- (a) $\{\sqrt[n]{n+100} : n \in \mathbb{N}\}$; (b) $\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $\{2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R}\}$; (d) $\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$; (e) $\{\frac{1000^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$;
(f) $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) : n \in \mathbb{N}\}$; (g) $\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$; (h) $\{\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbb{N}\}$.