Zadania domowe z Analizy Ind. Seria 1. 27.10.2018

1. Wyznaczyć i narysować zbiory
$$P = \bigcup_{t\in[0,1]} A_t, \quad Q = \bigcap_{t\in[0,1]} A_t \qquad \text{dla} \quad A_t = [t, 2t+1] \times [-t, t+1]$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, oraz ciąg $(b'_1, \ldots, b'_n)$ różni się od ciągu $(b_1, \ldots, b_n)$ jedynie kolejnością, to $\sum_{k=1}^n a_k b_k > \sum_{k=1}^n a_k b'_k$.

3. Niech (x_n) będzie ciągiem określonym następującymi warunkami: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{5}{4-x_n}$. Wykazać (na przykład indukcyjnie), że
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_{2n} = \frac{5 - x_n^2}{4 - 2x_n}.$$

4. Dowieść, że liczby Fibonacciego, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ mogą być otrzymane ze wzoru
$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$
Należy pamietać, że $\binom{n-k}{k} = 0$ zawsze jeśli $n-k < k$. Z definicji, dla $m > k$ $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1}{k!}$.

5. Ile jest podzbiorów $P \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ spełniających warunek
$$\forall k, l \in P \;\; |k - l| > 1 \text{ lub } k = l.$$

6. Niech R i Q będą relacjami równoważności w zbiorze X. Czy $R \cup Q$, $R \cap Q$ są relacjami równoważności?

7. Niech r będzie relacją z A do B i q relacją z B do C. Definiujemy złożenie $q \circ r$ tych relacji jako relację z A do C daną następującym warunkiem: $a \in A$ *jest w relacji* $q \circ r$ *z* $c \in C$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $b \in B$ *takie, że* a *jest w relacji* r *z* b *i* b *jest w relacji* q *z* c. Czy złożenie relacji równoważności jest relacją równoważności?

8. Wykazać, że $n! \le (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

9. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności: $2n + 1 < 2^n$; $3n^3 + 1 < 2^n$; $n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!! \le 2^{n-2} n!$?

10. Niech $a_1, a_2 \ldots, a_{100} \in \mathbb{R}$ — dane liczby, $s := |a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}|$. Dowieść, że istnieje permutacja $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ liczb $a_1, \ldots, a_{100}$, taka że $|b_1| \ge \frac{1}{100}s$, $|b_1 + b_2| \ge \frac{2}{100}s, |b_1 + b_2 + b_3| \ge \frac{3}{100}s, \ldots, |b_1 + b_2 + \ldots + b_{99}| \ge \frac{99}{100}s$.

11. Uprościć warunek:
(a) $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$; (b) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;
(d) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$; (e) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$; (f) $A \setminus B = B \setminus A$; (g) $A \cap B = (A \cup C) \cap (B \setminus C)$.

12. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:
(a) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$; (b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;
(c) $A \setminus (B \cup C \cup D) = ((A \setminus B) \setminus C) \setminus D$; (d) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup (A \cap C \setminus D)$.

13. Niech $A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$(*różnica symetryczna* zbiorów). Wykazać, że: działanie $\div$ jest przemienne i łączne; $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$; $A \div A = \emptyset$; $A \div \emptyset = A$; $A_1 \div A_2 \div \cdots \div A_n = \{x \in X : \; x$ należy do nieparzystej liczby zbiorów $A_1, \ldots, A_n\}$. Wyrazić sumę i różnicę mnogościową zbiorów poprzez operacje $\cap$ i $\div$.

14. Wykazać, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x + y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$, jest bijektywne, wyliczyć f^{-1}.

15. Wyliczyć:
$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$; $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; (x_1 - r)^2 + (x_2 + 2r)^2 \le r^2 + 1\}$;
$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left([0, n] \cup [n^2, \infty[, \right)$; (e) $\bigcup_{t\in[2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in[2,3]} A_t$, gdzie $A_t := [t, 2t] \times [-t, t]$;
(f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{(n+1)^2}, \frac{1}{n+1}\right[$; (g) $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k\ge n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k\ge n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

16. Niech $A_n \subset X$, $A_n' := X \setminus A_n$. Wykazać, że $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k<n} A_k \cup \bigcup_{k\geq n} A_k') = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$.

17. Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{1}{n} + Q(\frac{n}{3}), \frac{3n+1}{2n-1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $Q(x) := x - E(x)$.

18. Dla $s \geq 0$ oznaczmy $K_s := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-s)^2 \leq s\}$. Wykazać, że mają miejsce następujące zawierania: $\{(x,y) : y \geq x^2\} \subset \bigcup_{s\in\mathbb{N}} K_s \subset \bigcup_{s\in]0,\infty[} K_s = \{(x,y) : y \geq x^2 - \frac{1}{4}\}$.

19. Określmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^3$: $S := \{(x,y,z) :\ (x^2+y^2>0,\ z = \frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x=y=0,\ |z|\leq 1)\}$, $S_1 := \{(x,y,z) :\ |z| \leq 1,\ y = \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} x\}$, $S_2 := \{(x,y,z) :\ |z|\leq 1,\ x = \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} y\}$. Dowieść, że $S = S_1 \cup S_2$ oraz wyznaczyć $S_1 \cap S_2$.

20. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $f : X \longrightarrow]0,\infty[$ — dowolną funkcją. Wykazać, że istnieje $n \in N$ oraz parami różne elementy $x_1, \ldots, x_n \in X$, takie że $f(x_1) + \ldots + f(x_n) > 100$.

21. Wykazać, że $\bigcap(A_n \cup B_n) \supset (\bigcap A_n) \cup (\bigcap B_n)$. Znaleźć przykład, gdy nie ma równości. Pokazać, że w przypadku, gdy oba ciągi są *zstępujące* (tzn. $\forall n \in \mathbb{N} :\ A_{n+1} \subset A_n,\ B_{n+1} \subset B_n$), powyższa inkluzja przechodzi w równość.

22. Niech $\emptyset \neq X$ będzie zbiorem skończonym oraz $f : X \to X$. Wykazać, że:
(a) $R := \{(x,y) \in X \times X :\ \exists k,l \in N : f^k(x) = f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w X;
(b) zbiór $X_0 := \bigcap_{k\in N} f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_0) = X_0$ oraz $f|_{X_0} : X_0 \to X_0$ jest bijekcją;
(c) każda orbita $f|_{X_0}$ zawiera się w jednej z klas relacji R i każda z klas relacji R zawiera dokładnie jedną orbitę. Zatem $|X/R|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_0}$.

23. Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w R. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S \subset R\times R$. Znaleźć funkcję $f : R \to R$, której poziomice są klasami równoważności: $x \sim y \iff (x-y)(1-xy) = 0$; $x \sim y \iff (x = y$ lub $x = -y \in [-1,1]$ lub $|x| + |y| = 1)$; (c) $x \sim y \iff (x = y$ lub $\exists n \in \mathbb{Z} : x,y \in [2n-1, 2n])$; (d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbb{Z}$ lub $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$.

24. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie symetrycznym względem 0 przedziałem, a $X := \mathbb{R} \times I$. Sprawdzić, że relacja $(x,y) \sim (x',y') \iff [x'-x \in \mathbb{Z}, y' = (-1)^{x'-x} y]$ jest równoważnością w X. Zbiór $X/_\sim$ nazywa się *wstęgą Möbiusa* – dlaczego ?

25. Niech R będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1,0,1\}$. Określmy funkcję $d_R : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem:
$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|, & \text{gdy } (\mathrm{sgn} x_1, \mathrm{sgn} y_1) \in R \\ \|x\| + \|y\| & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$, gdzie $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ dla $x \in \mathbb{R}^2$.
Wykazać, że: (a) $[d_R(x,y) = 0 \iff x = y] \iff R$ jest zwrotna; (b) $[d_R$ jest symetryczna, tzn. $d_R(x,y) = d_R(y,x)\ \forall x,y \in \mathbb{R}^2] \iff R$ jest symetryczna; (c) d_R spełnia nierówność trójkąta $\iff R$ jest przechodnia. Zatem: d_R jest metryką w $\mathbb{R}^2 \iff R$ jest relacją równoważności. (d_R ma nazwę "metryka-rzeka" – dlaczego?).

26. Niech R będzie relacją równoważności w X oraz $X_0 \subset X$. Wykazać, że
(X_0 jest sumą pewnych klas równoważności R) $\iff (\forall x,y \in X : [x \in X_0, (x,y) \in R] \Rightarrow y \in X_0)$.

27. Dane są odwzorowania $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow Z$, $\gamma : Z \longrightarrow W$. Wykazać, że:
$[\beta\cdot\alpha$ injektywne $] \Rightarrow \alpha$ injektywne; $[\beta\cdot\alpha$ surjektywne $] \Rightarrow \beta$ surjektywne; $[\beta\cdot\alpha$ i $\gamma\cdot\beta$ są bijekcjami $] \Rightarrow \alpha, \beta$ i γ również są bijekcjami.

28. Niech $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow X$, $\gamma : X \longrightarrow X$. Wykazać, że:
α jest injektywne $\iff \forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A))$; α jest surjektywne $\iff \forall B \subset Y : B = f(f^{-1}(B))$; $[\alpha\cdot\gamma = \alpha,\ \alpha$ injektywne$] \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}_X$; $[\gamma\cdot\beta = \beta,\ \beta$ surjektywne $] \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}_X$; $[\alpha\cdot\beta$ injektywne, β surjektywne $] \Rightarrow \alpha$ injektywne; $[\beta\cdot\alpha$ surjektywne, β injektywne $] \Rightarrow \alpha$ surjektywne; $[\forall x \in X : \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{\gamma\cdot\cdots\cdot\gamma}_{n}(x) = x] \Rightarrow \gamma$ jest bijektywne.

29. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$; $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t + t^{-1}, t - t^{-1})$; $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) := az + \overline{z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ jest ustaloną liczbą, taką że $|a| = 1 \neq -a$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$; $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := 2n^2 - 3n + 1$; $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} - y$.

30. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$? *Wskazówka: nierówność Bernoulliego.*

31. Dowieść, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy: $E(x)+y \geq 0 \iff x+E(y) \geq 0$. Podać przykłady pokazujące, że zastępując tu nierówności $\geq$ nierównościami $>$ lub $\leq$ otrzymamy zdania fałszywe. Dowieść, że $y \geq E(x) \iff E(y) > x-1$.

32. Niech $E(x) :=$ (maksymalna liczba całkowita $\leq x$). Narysować wykresy funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x)-3E(\frac{x}{3}) \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory: (a) $0 \leq E(x+y)-E(x)-E(y) \leq 1$; (b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$; (c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$; (d) $\sum_{n=1}^{N} E(\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2}) = E(x)$, jeśli liczba $N \in \mathbb{N}$ jest dostatecznie duża.

33. Wykazać, że dla $m, n \in \mathbb{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}$; (b) jeśli $m \geq n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}$. *Wskazówka: nierówność Bernoulliego.*

34. Wykazać, że: $\frac{2n}{2n-1} \leq \sqrt[n]{2} \leq \frac{n+1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (*nierówność Bernoulliego*); (b) $2^n > n^{50}$ dla $n \geq 450$.

35. Wykazać, że: $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, $n \in \mathbb{N}$; $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

36. W n kolejnych latach wskaźnik inflacji przyjmował wartości $x_1, \ldots, x_n$, tzn. w k-tym roku ceny rosły $(1+x_k)$-krotnie. Napisać wzór na średni roczny wskaźnik inflacji za badany okres; wykazać, że jego wartość zawiera się pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

37. Wykazać, że: (a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n) = \frac{1}{100}$; (b) $\lim_{n\to\infty}\left(n+4\sqrt{n^2+n}-2\sqrt{n^2-n}-3\sqrt{n^2+2n}\right) = \frac{5}{4}$; (c) $\lim_{n\to\infty} n(2\sqrt{n^2-n+2}-3\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2n}) = -\frac{1}{4}$; (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^3+\sqrt{n^5}}}-\sqrt{n^2+\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{4}$; (e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)}-\sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}\right) = \frac{7}{3}$; (f) $\lim_{\to\infty} n^2\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^q-\left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{2}pq(q-p)$ dla $p, q \in N$; (g) $\lim_{\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) = 1$; (h) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3} = \max\{1, a^2\}$ dla $a \in R$; (i) $\lim_{\to\infty}(n^7+7)^{-7}\sqrt{(n+2)^{100}-n^{100}-200n^{99}} = 30\sqrt{22}$; (j) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{(3+x)^n+(1-x)^n} = 2+|1+x|$ dla $x \in \mathbb{R}$; (k) $\lim_{\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+\ldots+p_ra_r^{n+1}}{p_1a_1^n+\ldots+p_ra_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$ oraz $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{p_1a_1^n+\ldots+p_ra_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$, jeśli $r \in \mathbb{N}$ i liczby p_i, a_i są dodatnie; (l) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}-\frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}\right) = \frac{1}{2}$;
(m) $\lim_{\to\infty} 2^{-n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}) = 0$; (n) $\lim_{\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}) = +\infty$;
(o) $\lim_{\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n+2}\cdots\frac{n}{3n} = 0$; (p) $\lim_{\to\infty} n[(n+1)^{\frac{1}{100}}-n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$;
(q) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 2$;
(r) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}\right) = 1$; (s) $\lim_{\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$; (t) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{1^4+2^4+\ldots+n^4} = 1$; (u) $\lim_{\to\infty}\frac{n+2}{n^2-3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{k^2-2} = 1$.

38. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\ldots+a_n}{n+(n-1)+\ldots+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

39. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony, to ciąg (x_n) o wyrazach $x_n =: \frac{2^{n-1}a_1+\ldots+2a_{n-1}+a_n}{2^{n-1}+\ldots+2+1}$ jest zbieżny. Wyliczyć $\lim x_n$, jeśli $a_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 2$. *Wskazówka:* $\tilde{x}_n := (1-2^{-n})x_n$ *spełnia warunek Cauchy'ego.*

40. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1+\ldots+a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n \searrow 0$ przy $n \to \infty$, to $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

41. Dla danych liczb dodatnich a i b określmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n), przyjmując: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n), (b_n)$ są zbieżne oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{ab} = \lim_{n\to\infty} b_n$.

42. Wykazać zbieżność ciągu (a_n), jeśli:
(a) $a_n := (1+\frac{1}{1^2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{n^2})$; (b) $a_n := 1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\sqrt{2n}$; (c) $a_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$ (liczba $\lim a_n \approx 0.57721566$ nazywa się *stałą Eulera*); (d) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n+1}$.

43. Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie :
(a) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{3}x_n^3$, $x_0 = 1$; (b) $x_{n+1} = \frac{\pi}{2}\sin x_n$ $x_0 = 1$; (c) $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$, $x_0 = 1$.

44. Dla podanych niżej ciągów obliczyć $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\liminf x_n$, $\limsup x_n$
(a) $x_n = \frac{n-10}{n^2}$, (b) $x_n = \frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$, (c) $x_n = \frac{n-E(\sqrt{n})^2+1}{E(\sqrt{n})}$, (d) $x_n = n-10[\frac{n}{10}]+\frac{2}{n}$; (e) $x_n = n-\frac{5}{n}-5E(\frac{n}{5})$; (f) $x_n = \frac{24}{n}+\frac{n}{10}-[\frac{n}{10}]$;

45. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru:
(a) $\{\sqrt[n]{n+100} : n \in \mathbb{N}\}$; (b) $\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $\{2^x+2^{1-x} : x \in \mathbb{R}\}$; (d) $\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$; (e) $\{\frac{1000^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$; (f) $\{\sqrt{n}-E(\sqrt{n-1}) : n \in \mathbb{N}\}$; (g) $\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$; (h) $\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbb{N}\}$.