

1. Zbadać zbieżność szeregów:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{E(\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{n}})$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2 \pi}{n+1}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2 + n + 1})^p$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n+5 \sin n}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3-2n}{3+2n})^n$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{3} - 2)^n$; (j) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{1+\sqrt[3]{p}})^n$; (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$; (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (10 - p\sqrt[3]{5})^n$; (m) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q \log n}$; (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n(n+1)}{n^2+1}$; (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n - \cos n}$; (p) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^n$; (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(1 + \frac{1}{n})$; (r) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}{2} - \sqrt{n})$; (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n + 1}{n(n+1)^n}$; (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (u) $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{2^n}$; (w) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n})$; (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}$; (y) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2+n}{1+n^2})^p$; (z) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$; (aa) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (ab) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n})$; (ac) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}})$; (ad) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5\sqrt{2n}}$; (ae) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$; (af) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\cos \frac{1}{n})$; (ag) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n})$; (ai) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$; (aj) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$; (ak) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 11^{-n}$; (al) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$; (am) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5 \sin n}) \sin(n\alpha)$; (an) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$; (ao) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$; (ap) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$; (aq) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (ar) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$; (as) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$; (at) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log \log n)^{-\log n}$; (au) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}}$; (aw) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt[3]{n!}}$; (ax) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n})$; (ay) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$; (az) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{E(\frac{n}{\sqrt{3}})}$; (ba) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[3]{n})^n$; (bb) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}})$; (bc) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt[3]{n^3 + n})$;

2. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to do tej samej sumy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ o wyrazach $\tilde{a}_n := \frac{1}{n(n+1)}(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n)$.

3. Niech $s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ oraz $s' := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$ (s' różni się od s jedynie kolejnością składników: po dwóch składnikach dodatnich następuje jeden składnik ujemny). Wykazać, że $s' = \frac{3}{2}s$.

4. (C) Wykazać, że jeśli $a_n > 0$ i istnieje $l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log n}$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest przy $l < -1$ zbieżny, a przy $l > -1$ — rozbieżny.

5. Niech Z — dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z : A : \text{skończony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A, B) := |A \div B| := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ określa metrykę w zbiorze P . Opisać kule i odcinki względem tej metryki.

6. Sprawdzić, że wzór $d(x, y) := \min\{|x - y|, 3 - |x| - |y|\}$ zadaje metrykę na zbiorze $X := [-1, 1]$. Dla wartości $r = \frac{4}{5}$ i $r = \frac{5}{4}$ wyznaczyć kulę $K(1; r)$ (względem metryki d). Wykazać, że (średnica (X, d)) := $\sup_{x, y \in X} d(x, y) = \frac{3}{2}$.

7. Sprawdzić, że wzór $d(x, y) := ||x| - |y|| + |\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y|$ określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć kule (względem d) o środku $x_0 = 4$ i promieniach $r = 3, 4, 5, 6$. Pokazać, że $K(4; r)$ jest przedziałem $\iff 0 < r \leq 2$ lub $r \geq 6$.

8. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ funkcja $d(x, y) := \begin{cases} |x - y|, & \text{gdy } x - y \in \mathbb{Q} \\ a, & \text{gdy } x - y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ jest metryką na $[-1, 1]$.

9. *Metryka cyklicznego uporządkowania przedziału*: Niech $X := [a, b[\subset \mathbb{R}$ oraz $h := b - a$ (lub $X := \overline{1, n} \subset \mathbb{Z}$ oraz $h := n$); sprawdzić, że wzór $d(x, y) := \min(|x - y|, h - |x - y|)$ określa metrykę w zbiorze X .

10. Wykazać, że funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaje *pseudometrykę* na $\mathbb{R}$ (tzn. spełnia warunki $d(x, x) = 0, d(x, y) = d(y, x), d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$); opisać określoną przez d relację równoważności w $\mathbb{R}$: $x \sim y \iff d(x, y) = 0$.
 $d(x, y) := |\sin x - \sin y| + |\cos x - \cos y|$; $d(x, y) := |\sin x - \sin y| + |\sin(x - y)|$.

11. Czy wzór $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$ określa metrykę na $\mathbb{R}$?

12. Dowieść, że: zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony;

13. Dowieść, że jeśli (x_n) i (y_n) są dwoma ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d) , to ciąg liczbowy $(d(x_n, y_n))$ jest zbieżny.

14. Niech $X := K(0, 1) = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ oraz $d(x, y) := \min\{|x - y|, 2 - |x| - |y|\}$. Sprawdzić, że (X, d) jest przestrzenią metryczną niezupełną (tzn istnieją ciągi Cauchy'ego nie mające w X granicy). Narysować $K(p, R)$ (kula o środku p i promieniu R) dla $(p; R)$ równych odpowiednio: $((0, 0); \frac{1}{2})$; $((0, \frac{3}{4}); \frac{1}{2})$.

15. Wykazać, że dla dowolnych rozłącznych przedziałów domkniętych $[a, b]$ i $[c, d]$ w $\mathbb{R}$ istnieje funkcja na $\mathbb{R}$ klasy C^∞ taka, że $f \equiv 0$ na $[a, b]$ i $f \equiv 1$ na $[c, d]$. Wsk. Można wykorzystać funkcję $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$
16. Wykazać, że $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 1\}$ ma cztery spójne składowe.
17. Zbadać zwartość, spójność, domkniętość i ograniczoność zbioru: $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x + y)^2 = 1\}$.
18. Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność poniższych podzbiorów przestrzeni $X \subset \mathbb{R}$
- $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $A := \{1\}$, $B := \{0, 1, \frac{1}{2}\}$, $C :=$ dowolny podzbiór X ;
 - $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$;
 - $X :=]0, \frac{1}{2}[$, $A := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$;
 - $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$ – ustalone;
 - $X := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$ – ustalone;
19. Niech $X :=]0, \infty[$. Podać przykład funkcji ciągłej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dla której $f(X)$ jest zbiorem : a) domkniętym i nieograniczonym, b) domkniętym i ograniczonym (czyli zwartym).
20. (C) Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$ w topologii zadanej metryką $d(m, n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Czy metryka $d_o(m, n) := |m - n|$ określa tę samą co d topologię w zbiorze $\mathbb{N}$?
21. (C) Zbadać domkniętość, zwartość, spójność i otwartość zbiorów: a) Zbiór funkcji wielomianowych na odcinku $[0, 1]$. (jako podzbiór $C[0, 1]$ z metryką $d(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$) b) Jak wyżej lecz ograniczamy się do wielomianów stopnia nie większego niż 17.
22. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną; dla $A \subset X$ i $\epsilon \geq 0$ oznaczmy $A_\epsilon := \{x \in X : \exists a \in A : d(x, a) \leq \epsilon\}$. Rozważmy następujące implikacje: (D) A domknięty $\Rightarrow A_\epsilon$ domknięty; (O) A otwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ otwarty; (Z) A zwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ zwarty; (S) A spójny $\Rightarrow A_\epsilon$ spójny. Dowieść, że: (a) A zwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ domknięty; (b) w przestrzeni $X := \mathbb{R}^n$ z metryką $d(x, y) := |x - y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są również prawdziwe; (c) dla $X :=]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[$; z metryką $d(x, y) := |x - y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są fałszywe.
23. (C) Wykazać, że przestrzeń metryczna, w której każdy podzbiór ograniczony i domknięty jest zwarty, jest zupełna.
24. Odwzorowanie f nazywa się *domknięte (otwarte)*, jeżeli f -obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągłe (w zwykłej topologii $\mathbb{R}$) odwzorowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest domknięte lub otwarte:
 $f(x) := \sqrt{1 + x^2}$; $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; (c) $f(x) := \frac{2x}{1 + x^2}$; $f(x) := \sin x$.
25. (C) Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja odcinka domkniętego na zbiór $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$.
26. Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. (zatem $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$ nie są homeomorficzne). Uogólnić wynik na $\mathbb{R}^m, m \geq 2$ i $\mathbb{R}$.
27. Czy istnieje ciągła bijekcja okręgu na prostą?
28. (C) Niech $C(r)$ oznacza okrąg na płaszczyźnie o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r . Niech $X := \bigcup_{n=2}^\infty C(1 - \frac{1}{n})$, $Y := \bigcup_{n=3}^\infty C(\frac{1}{n})$ będą podzbiorami w $\mathbb{R}^2$ ze standardową metryką. a) Wykazać, że X i Y są niezupełnymi przestrzeniami metrycznymi. b) Skonstruować homeomorfizm (tzn. ciągłą bijekcję taką, że odwrotna jest ciągła) $X \rightarrow Y$. c) Znaleźć uzupełnienia X i Y i wykazać, że nie są homeomorficzne. (Czyli homeomorficzne przestrzenie metryczne mogą mieć niehomeomorficzne uzupełnienia.)
29. Wyliczyć granice:
- $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\frac{1}{x} - \cot x)$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^4 \log(1 + x^{-2}))$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1})$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{x-1}{\log^2 x} - \frac{1}{x-1})$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-5} (x - \sqrt{1 + \frac{x^2}{3} \sin x})$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{e^{ax} - ax}{e^{bx} - bx}) x^{-2}$;
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + \sin x)^{x^{-3}}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(x + \frac{1}{x}) - \cos(x - \frac{1}{x}))$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\cos x) - \sin x}{\cos^4 x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\cos x}{\cosh x})^{1/x^2}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 + \cos x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1-} (\tan \frac{\pi x}{2})^{1-x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$.

30. Znaleźć punkty nieciągłości funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (w zależności od wartości parametrów)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} & x \neq 1, 2 \\ a & x = 2 \\ 1 & x = 1 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3+x^2}{\sin x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^n-1}{x^m-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{N};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x-1}{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2} & |x| > 1 \\ ax^2+bx+c & |x| \leq 1 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}.$$

31. Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków $W_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości $n \in \mathbb{N}$.

32. Dla $x \in [-1, 1]$ udowodnić tożsamość: $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

33. Dla $x \in [0, \infty]$ wykazać nierówność: $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

34. Dowieść, że:

- (a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ dla $x > 0$; (b) $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$; (c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$;
 (d) $(4 - \cos x) \frac{\sin x}{x} < 3$ dla $x \neq 0$; (e) $|\frac{1+x}{x} \arctan x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$; (f) $1 + x \log(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

35. Dowieść, że funkcja $f(x) := (1+x)^{1/x}$, $-1 < x \neq 0$, da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na $] -1, \infty[$. Wyliczyć $f(0)$ i $f'(0)$ oraz wykazać, że funkcja $x \mapsto f(x)$ jest malejąca, a $x \mapsto (1+x)f(x)$ — rosnąca na $] -1, \infty[$.

36. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{gdy } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że:

- (a) f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}$ (wyliczyć $f'(0)$);
 (b) f jest malejąca;
 (c) f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.
 (d) funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta.

37. Dowieść, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

38. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:

$$f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}, x \in \mathbb{R}; f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3/2}}, x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) := (x+1)\arctan x, x \in \mathbb{R}.$$