Zadania domowe z Analizy IR. Seria 3. 24.12.2019

1. Obliczyć całki nieoznaczone:
(a) $\int(x^2-2x+3)e^x dx$; (b) $\int \sin^3 x\,dx$; (c) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; (d) $\int \sqrt{x}(\log x)^2 dx$; (e) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; (f) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (g) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$;)h) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$; (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}}$; (j) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$; (k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$; (l) $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$; (m) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$; (n) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (o) $\int \tan^2 x\,dx$; (p) $\int \frac{1}{x^2}\arcsin x\,dx$; (q) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$; (r) $\int x^{-\frac{3}{2}}\log(1+\sqrt{x})dx$; (s) $\int \frac{\log|1-x|}{x^{n+1}}dx$; (t) $\int(\frac{x}{\arctan x}-1)^{-2}dx$; (u) $\int \sin(\log x)dx$; (w) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$; (x) $\int \frac{\tan 2x\,dx}{2-3\cos^2 x}$; (y) $\int \frac{\sin x\cos^3 x\,dx}{2+\sin^2 x}$; (z) $\int \sqrt{e^{2x}+2e^x+4}\,dx$; (aa) $\int e^{-x}\frac{x^n}{n!}dx$; (ab) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}}$; (ac) $\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}}$; (ad) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}}$; (ae) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$;

2. Obliczyć całki oznaczone:
(a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; (b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$; (c) $\int_2^3 \frac{dx}{x\log x}$; (d) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$; (e) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; (f) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ (g) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ (h) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (i) $\int_0^1 \log^3 x dx$; (j) $\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$; (k) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\tan^p x}$ dla $p\in\mathbb{R}$; (l) $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$, $n\in\mathbb{N}$; (m) $\int_0^\pi \cos^n x\cos nx\,dx$; (n) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$; (o) $\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; (p) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$; (q) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; (r) $\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx$, $m,n\in\mathbb{N},\ a<b$; (s) $\int_0^1(1-x^2)^n dx$, $n\in\mathbb{N}$; (t) $\int_0^{\log 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$;

3. Obliczyć pochodne funkcji:
(a) $f(x) := \int_{x^2}^{x^3}\sin(t^2)$; (b) $g(x) := \int_{\sin x}^{\cos x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

4. Zbadać funkcję $f(x) := \int_0^x \frac{t^2+t}{\sqrt{t^2-2t+2}}dt$

5. Dowieść, że jeśli funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek $\forall x\in\mathbb{R}: \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$, to jest okresowa.

6. Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:
(a) $F_n(x) := \int(\frac{x^2}{x^2+1})^n dx$ (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x(x^2+1)^n}$ (wyliczyć $F_4(x)$) (c) $F_n(x) := \int \frac{x^p\,dx}{\log^n x}$, $p\in\mathbb{R}$ (d) $F_n(x) := \int x^{p-n}e^x dx$, $p\in[0,1[$ (e) $\int \frac{dx}{x^n(1+x)}$ (wyprowadzić wzór na $F_n(x)$)

7. Znaleźć wzór rekurencyjny, wyrażający $F_{n+2}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:
(a) $F_n(x) := \int \cos^n x\,dx$ (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{\sin^n x}$ (c) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(x^2+1)}$ (znaleźć wzory na $F_{2k}(x)$ i $F_{2k+1}(x)$) (d) $F_n(x) := \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (e) $F_n(x) := \int x^n\cos x\,dx$

8. Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranej całki wyliczyć granice:
(a) $\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$; (b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{kn}) = \log k$ dla $2\le k\in N$; (c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{\log 2}$.

9. (C) Dla $k\in\mathbb{Z}_+$ oznaczmy $c_k := \int_0^a x^k\cos x\,dx$, gdzie $a := \frac{\pi}{2}$. Wykazać, że:
(a) $c_{2n} = (-1)^n(2n)!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}$; (b) $c_{2n+1} = (-1)^n(2n+1)!(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!}-1)$;
(c) $0\le \frac{a}{(k+1)(k+2)} - \frac{c_k}{a^{k+1}} \le \frac{k!a^3}{(k+4)!}$; (d) $\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{a^{k+1}}c_k = a = \frac{\pi}{2}$.

10. Dowieść, że jeśli funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i nieujemna, to:
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n\,dx} = sup\,f([a,b])$.

11. Niech $f(x) := e^{\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ dla $t\in\mathbb{R}$. Dowieść, że: (a) Dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi wzór $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!} + r_n(x)$, gdzie $r_n(x) := \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{(2k-1)!!}\int_0^x t^{2n}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$; (b) $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ dla $x\in\mathbb{R}$ skąd wynika wzór: $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!}$.