Zadania domowe z Analizy I Ind. Seria 3. 19.12.2018

1. Wyliczyć granice:
(a) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \cot x)$;
(d) $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x^4\log(1+x^{-2}))$; (e) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1})$; (f) $\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\log^2 x} - \frac{1}{x-1})$;
(g) $\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; (h) $\lim_{x\to 0} x^{-5}(x - \sqrt{1+\frac{x^2}{3}}\sin x)$; (i) $\lim_{x\to 0}(\frac{e^{ax}-ax}{e^{bx}-bx})^{x^{-2}}$;
(j) $\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$; (k) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}$; (l) $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$;
(m) $\lim_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{x^{-3}}$; (n) $\lim_{x\to\infty}(\cos(x+\frac{1}{x}) - \cos(x-\frac{1}{x}))$; (o) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;
(p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\cos x)-\sin x}{\cos^4 x}$; (q) $\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\cosh x})^{1/x^2}$; (r) $\lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$;
(s) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$; (t) $\lim_{x\to 1-}(\tan\frac{\pi x}{2})^{1-x}$; (u) $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$.

2. Korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora znaleźć granice:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{e^x - 1 - x - x^2 - x^3 - x^4 4}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x^2) - x^2}{\cos x - 1 + x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x + x^3}{\ln(1-x) + x + x^2 + x^3 + x^4}$$

3. Znaleźć punkty nieciągłości funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (w zależności od wartości parametrów)
$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} & x \neq 1,2 \\ a & x = 2 \\ 1 & x = 1 \end{cases} ;$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3+x^2}{\sin x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} ;$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^n-1}{x^m-1} & x \neq 1 \quad m,n \in N \\ a & x = 1 \end{cases} ;$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x-1}{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} ;$$
$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2} & |x| > 1 \\ ax^2+bx+c & |x| \leq 1 \end{cases} ;$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases} .$$

4. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja
$$f(x) := \begin{cases} ax+b, & \text{gdy } a \leq 0, \\ \left(\frac{1}{x}\arcsin x\right)^{\frac{1}{x^2}}, & \text{gdy } 0 < x < 1 \end{cases}$$
jest różniczkowalna.

5. Zbadać różniczkowalność funkcji w $\mathbb{R}$ danej wzorem:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$$

6. Sprawdzić różniczkowalność funkcji w podanych punktach:
$$f_1(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \qquad f_2(x) := \begin{cases} 2^x + 3x^2, & \text{gdy } x < 2, \\ \log_{\sqrt{2}} x + 7x, & \text{gdy } x \geq 2, \end{cases}$$
$$f_3(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\cos\frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \qquad f_4(x) := \begin{cases} x^3 + x^2 - \frac{1}{\pi}\sin\pi x, & \text{gdy } x \leq 1, \\ x^5 + x, & \text{gdy } x > 1, \end{cases} .$$

7. Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków $W_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości $n \in \mathbb{N}$.

8. Dla $x \in [-1,1]$ udowodnić tożsamość: $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. Dla $x \in [0,\infty]$ wykazać nierówność: $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

10. Dowieść, że:
(a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ dla $x > 0$; (b) $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$; (c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$;
(d) $(4-\cos x)\frac{\sin x}{x} < 3$ dla $x \neq 0$; (e) $|\frac{1+x}{x} \arctan x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$; (f) $1 + x\log(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

11. Dowieść, że funkcja $f(x) := (1+x)^{1/x}$, $-1 < x \neq 0$, da się przedłużyc do funkcji różniczkowalnej na $]-1,\infty[$. Wyliczyć $f(0)$ i $f'(0)$ oraz wykazać, że funkcja $x \mapsto f(x)$ jest malejąca, a $x \mapsto (1+x)f(x)$ — rosnąca na $]-1,\infty[$.

12. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że:
(a) f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}$ (wyliczyć $f'(0)$);
(b) f jest malejąca;
(c) f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.
(d) funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta.

13. Dowieść, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

14. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:
$f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
$f(x) := (x+1)\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.