Zad. 11

Opisać i naszkicować na płaszczyźnie zbiór

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3nx+4ny \le 25 \}$$

A]

Zauważmy, że zbiór X jest sumą kół opisanych nierównością

$$x^2+y^2-3nx+4ny \le 25$$

$$x^2-3nx+\tfrac{9}{4}n^2+y^2+4ny+4n^2 \le 25+\tfrac{9}{4}n^2+4n^2$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}n\right)^2+\left(y+2n\right)^2 \le \left(\sqrt{25+\tfrac{25}{4}n^2}\right)^2$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}n\right)^2+\left(y+2n\right)^2 \le \left(\tfrac{5}{2}\sqrt{4+n^2}\right)^2$$

Czyli zbiór X jest sumą kół o współrzędnych środka $(\frac{3}{2}n; -2n)$ i promieniu długości $\frac{5}{2}\sqrt{4+n^2}$.

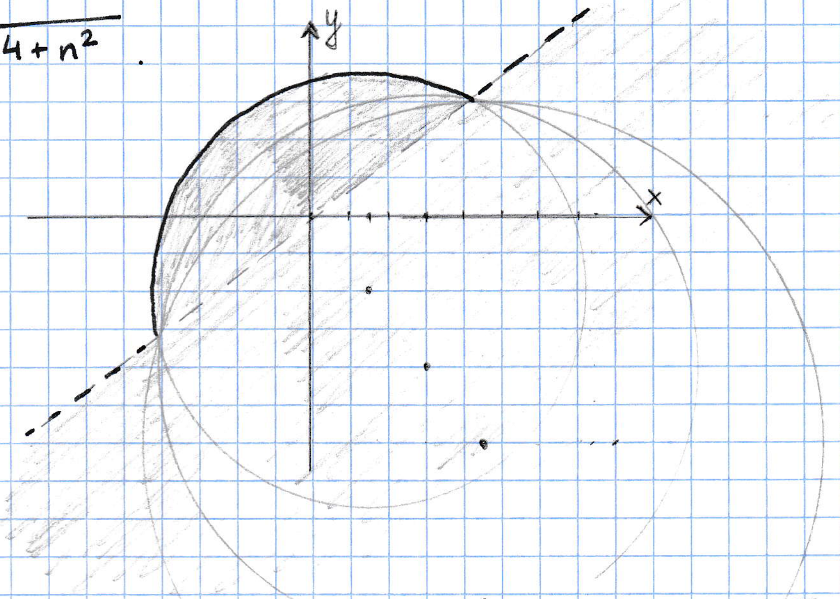
Naszkicujmy początkowe koła

dla $n=1$: $k_1: ((3/2, -2), \frac{5}{2}\sqrt{5})$

dla $n=2$: $k_2: ((3, -4), \frac{5}{2}\sqrt{8})$

dla $n=3$: $k_3: ((9/2, -6), \frac{5}{2}\sqrt{13})$

$\frac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5{,}6$ $\frac{5}{2}\sqrt{8} \approx 7{,}1$ $\frac{5}{2}\sqrt{13} \approx 9$



B] Dla uproszczenia w tej części zadania będziemy rozpatrywać okręgi zamiast kół.

Z rysunku możemy przypuszczać, że wszystkie okręgi przecinają się w dwóch punktach. Sprawdźmy więc, gdzie przecinają się dwa dowolne okręgi

$$-\begin{cases} x^2+y^2-3nx+4ny=25 \\ x^2+y^2-3mx+4my=25 \end{cases}$$

$$3mx-3nx+4ny-4my=0$$

$$4y(n-m) = 3x(n-m) \quad \| : (n-m) \quad \text{bo } n \ne m$$

$$4y = 3x$$

$$y = \tfrac{3}{4}x$$

Podstawmy te dane do dowolnego z równań:

$$x^2+y^2-3nx+4\cdot\tfrac{3}{4}x = 25$$

$$x^2+\tfrac{9}{16}x^2 = 25$$

$$\tfrac{25}{16}x^2 = 25$$

$$x=\sqrt{16} \quad \lor \quad x=-\sqrt{16}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$$

Współrzędne punktów są niezależne od n: Wszystkie okręgi przecinają się w tych samych punktach.

C] Zastanówmy się, co się dzieje dla każdego, dowolnie dużego n.

$$x^2 + y^2 - 3nx + 4ny \leq 25$$
$$x^2 + y^2 \leq 25 + n(3x - 4y)$$

$x^2 + y^2$ jest zawsze większe lub równe 0, więc aby nierówność była spełniona dla dowolnie dużego n, $3x - 4y$ nie może być ujemne. Zatem

$$3x - 4y \geq 0 \iff y \leq \frac{3}{4}x$$

te punkty należą do zbioru, bo niezależnie od wyboru x i y, jeśli punkt spełnia to równanie, to dla odpowiednio dużego n będzie spełniał również równanie koła.

D] Pozostało wykazać, że fragment zbioru X, który „wystaje" ponad prostą $y = \frac{3}{4}x$, zawiera się w kole o $n = 1$.

Pokażmy więc, że dowolny punkt (x, y), $y > \frac{3}{4}x$, który nie należy do k_1, nie należy do zbioru X

$$\left((x, y) \notin k_1 \wedge y > \frac{3}{4}x\right) \Rightarrow (x, y) \notin X$$

Dowód:

$$(x, y) \notin k_1 \iff x^2 + y^2 - 3x + 4y > 25$$

Teraz jeśli $y > \frac{3}{4}x \iff 4y > 3x$ to $-3x + 4y > 0$

n-te koło można opisać wzorem

$$x^2 + y^2 + n(\underbrace{-3x + 4y}_{>0}) \leq 25$$

A jeśli $-3x + 4y > 0$ i $x^2 + y^2 + 1 \cdot (-3x + 4y) > 25$

to gdy $n > 1$, na pewno nie zachodzi $x^2 + y^2 + n \cdot (-3x + 4y) \leq 25$