14. Znaleźć zbiory $\bigcup_{t\in[0,1]} A_t$ i $\bigcap_{t\in[0,1]} A_t$, jeśli $A_t = \underbrace{[t, 2t+1]}_{x} \times \underbrace{[-t, t+1]}_{y}$

Jeśli $(x,y) \in A_t$, oznacza to, że spełniają nierówności: $\begin{cases} t \leq x \leq 2t+1 \\ -t \leq y \leq t+1 \end{cases}$

Dostajemy stąd cztery warunki dla t:

$$\left.\begin{array}{lll} t \leq x & & \\ x \leq 2t+1 & \iff & t \geq \frac{x-1}{2} \\ -t \leq y & \iff & t \geq y \\ y \leq t+1 & \iff & t \geq y-1 \end{array}\right\} \quad \{y-1, -y, \tfrac{x-1}{2}\} \leq t \leq \{x\}$$

Przyjmijmy $B = \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\}$

część wspólna $\quad (x,y) \in \bigcap_{t\in[0,1]} A_t \iff \forall t\in[0,1]: \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\} \leq t \leq \{x\}$

Żeby ta nierówność była prawdziwa dla każdego $t\in[0,1]$, każdy element zbioru B musi być niewiększy niż 0, zaś x musi być niemniejsze niż 1.

$y-1 \leq 0 \iff y \leq 1$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{2} \leq 0 \iff x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1$

$-y \leq 0 \iff y \geq 0$

Zatem: $\quad (x,y) \in \bigcap_{t\in[0,1]} A_t \iff (x,y) \in \{1\} \times [0,1]$

suma $\quad (x,y) \in \bigcup_{t\in[0,1]} A_t \iff \exists t\in[0,1]: \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\} \leq t \leq \{x\}$

Żeby ta nierówność była prawdziwa dla przynajmniej jednego $t\in[0,1]$, każdy element zbioru B musi być niewiększy niż 1, zaś x musi być niemniejsze niż 0. Dodatkowo trzeba pamiętać, aby każdy element zbioru B był niewiększy od x.

$y-1 \leq 1 \iff y \leq 2$ $\qquad \frac{x-1}{2} \leq 1 \iff x \leq 3$ $\qquad y-1 \leq x \iff y \leq x+1$

$-y \leq 1 \iff y \geq -1$ $\qquad x \geq 0$ $\qquad -y \leq x \iff y \geq -x$

$\frac{x-1}{2} \leq x \iff x \geq -1$

Zatem: $\quad (x,y) \in \bigcup_{t\in[0,1]} A_t \iff (x,y) \in [0,3] \times [\max\{-1,-x\}, \min\{2, x+1\}]$

rysunkowo: