

14. Zadanie: Zbiory $\bigcup_{t \in [0,1]} A_t$ i $\bigcap_{t \in [0,1]} A_t$, gdzie $A_t = \underbrace{[t, 2t+1]}_x \times \underbrace{[-t, t+1]}_y$

Jeśli $(x, y) \in A_t$, oznacza to, że spełnia nierówności: $\begin{cases} t \leq x \leq 2t+1 \\ -t \leq y \leq t+1 \end{cases}$

Dostajemy stąd cztery warunki dla t :

$$\left. \begin{array}{l} t \leq x \\ x \leq 2t+1 \Leftrightarrow t \geq \frac{x-1}{2} \\ -t \leq y \Leftrightarrow t \geq -y \\ y \leq t+1 \Leftrightarrow t \geq y-1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\} \leq t \leq \{x\} \\ \text{Przyjmujemy } B = \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\} \end{array} \right.$$

Czaszka wspólna $(x, y) \in \bigcap_{t \in [0,1]} A_t \Leftrightarrow \forall t \in [0,1]: \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\} \leq t \leq \{x\}$

Zbyta nierówność była prawdziwa dla każdego $t \in [0,1]$, każdy element zbioru B musi być mniejszy niż 0, zaś x musi być mniejsze niż 1.

$$\left. \begin{array}{l} y-1 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \\ -y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \\ \frac{x-1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

Zatem: $(x, y) \in \bigcap_{t \in [0,1]} A_t \Leftrightarrow (x, y) \in \{1\} \times [0,1]$

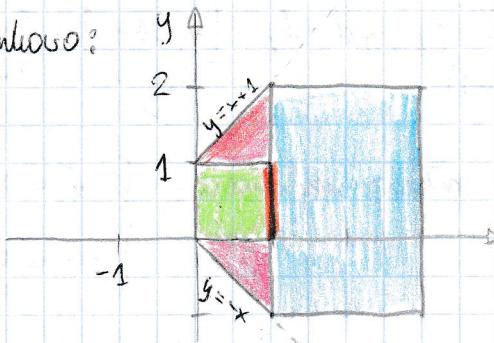
Suma $(x, y) \in \bigcup_{t \in [0,1]} A_t \Leftrightarrow \exists t \in [0,1]: \{y-1, -y, \frac{x-1}{2}\} \leq t \leq \{x\}$

Zbyta nierówność była prawdziwa dla przynajmniej jednego $t \in [0,1]$, każdy element zbioru B musi być mniejszy o niż 1, zaś x musi być mniejsze niż 0. Dopotkowo trzeba pamiętać, aby każdy element zbioru B był mniejszy od x .

$$\begin{array}{lll} y-1 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 2 & \frac{x-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 3 & y-1 \leq x \Leftrightarrow y \leq x+1 \\ -y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq -1 & x \geq 0 & -y \leq x \Leftrightarrow y \geq -x \\ & & \frac{x-1}{2} \leq x \Leftrightarrow x \geq -1 \end{array}$$

Zatem: $(x, y) \in \bigcup_{t \in [0,1]} A_t \Leftrightarrow (x, y) \in [0, 3] \times [\max\{-1, -x\}, \min\{2, x+1\}]$

mysunkiowo:



- część wspólna

- A_t dla $t=0$

- A_t dla $t=1$



- suma