Stanisław Kurdziałek

ZADANIE 17.

$x = (x_1, x_2)$

$y = (y_1, y_2)$

a)

$(\Leftarrow)$

Zakładamy, że R jest zwrotna.

Wtedy $\forall_{a \in \mathbb{R}} (\operatorname{sgn} a, \operatorname{sgn} a) \in R$

$x = y \Rightarrow (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \in R \Rightarrow d_R(x,y) = \|x-y\| = \|x-x\| = \|0\| = 0$

$d_R(x,y) = 0 \Rightarrow$ $\|x-y\| = 0 \Rightarrow x-y = (0,0) \Rightarrow x = y$

$\vee$

$\|x\| + \|y\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \wedge \|y\| = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x = y$

Mamy więc $d_R(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Zauważmy, że implikacja w prawo zachodzi niezależnie od zwrotności R.

$(\Rightarrow)$ Przeprowadzę dowód ad absurdum. Załóżmy, że R nie jest ~~równoważna~~ zwrotna. Wtedy:

$\sim \left(\forall_{t \in \{-1,0,1\}} (t,t) \in R \right) \Rightarrow \exists_{t \in \{-1,0,1\}} (t,t) \notin R \Rightarrow \exists_{x_1 \in \mathbb{R}} (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} x_1) \notin R$

Weźmy punkty $x = y = (x_1, 1)$, gdzie $(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} x_1) \notin R$.

Wtedy $d_R(x,y) = \|x\| + \|y\| = 2\|x\| = 2\sqrt{x_1^2+1} \geqslant 2 \cdot 1 = 2$.

stąd mamy $x = y \wedge d_R(x,y) \neq 0 \Rightarrow$ lewa strona równoważności nie jest prawdziwa.

b)

(⇐)

Załóżmy, że R jest symetryczna

$$\forall_{x,y} \; d_R(x,y) \overset{def.}{=} \begin{cases} \|x_1 - y\| & \text{gdy } (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \in R \\ \|x\| + \|y\| & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \|y - x\|, & \text{gdy } (\operatorname{sgn} y_1, \operatorname{sgn} x_1) \in R \\ \|y\| + \|x\|, & \text{w.p.p.} \end{cases} \overset{def.}{=} d_R(y,x)$$

Korzystałem z faktu, że $(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \in R \Leftrightarrow (\operatorname{sgn} y_1, \operatorname{sgn} x_1) \in R$, co wynika z def. symetrii relacji R

(⇒) Znów przeprowadzę dowód nie wprost.

Jeśli R nie jest symetryczna, to $\exists_{t_1, t_2 \in \{-1,0,1\}} \; ~~dla~~ \; (t_1, t_2) \notin R \wedge (t_2,$

Z nier. trójkąta wynika, że $\|x\| + \|y\| \geq \|x - y\|$ dla dowolnych x,y. Stąd $\|x-y\| \leq d_R(x,y) \leq \|x\| + \|y\|$ (***)

Weźmy $x = (x_1, a)$, $y = (y_1, a)$ takie że $\operatorname{sgn} x_1 = t_1 \wedge \operatorname{sgn} y_1 = t_2$

$a \neq 0 \wedge |a| > |x_1 - y_1|$ (**)

~~Wtedy~~ $\cancel{d_R(x,y) = \|x\| + \|y\| \geq \|x+y\| = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + 2^2}} \; \rightarrow$

$\cancel{\geq \sqrt{(x_1+y_1)^2}}$ ~~nier. trójkąta~~

$$\text{Wtedy } d_R(x,y) = \|x\| + \|y\| \overset{(*)}{=} \sqrt{x_1^2 + a^2} + \sqrt{y_1^2 + a^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2} = 2|a| > |a| \overset{(**)}{>} \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (a-a)^2}$$

$$\overset{*}{=} \|y - x\| \overset{*}{=} d_R(y,x)$$

Mamy więc $d_R(x,y) > d_R(y,x) \Rightarrow d_R(x,y) \neq d_R(y,x)$

Nieprawdą jest więc, że d_R jest symetryczna CKD.

c)

$(\Leftarrow)$

Załóżmy, że R jest przechodnia.

Weźmy $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

Załóżmy, że $(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \notin R$

Wtedy

$$d_R(x,y) + d_R(y,z) = \|x\| + \|y\| + d_R(y,z) \overset{(***)}{\geq} \|x\| + \underbrace{\|y\| + \|y-z\|}$$

Używam nier. trójkąta dla klasycznej metryki, nie d_R)

Z nier. trójkąta $\|y\| + \|y-z\| \geq \|y-(y-z)\| = \|z\|$, stąd

$$d_R(x,y) + d_R(y,z) \geq \|x\| + \|z\| \underset{(***)}{\geq} d_R(x,z)$$, czyli d_R

spełnia nier. trójkąta.

$x_1) \in R$ (*)

Analogicznie: $(\operatorname{sgn} y_1, \operatorname{sgn} z_1) \notin R \Rightarrow$

$$d_R(x,y) + d_R(y,z) \geq \underbrace{\|x-y\| + \|y\|} + \|z\| \geq \|x-y+y\| + \|z\| = \|x\| + \|z\| \geq$$

$$\geq d_R(x,z)$$

Pozostaje rozpatrzyć przypadek, w którym $(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \in R \wedge$
$(\operatorname{sgn} y_1, \operatorname{sgn} z_1) \in R$. Z przechodniości R $(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} z_1) \in R$

Mamy wtedy:

$$d_R(x,y) + d_R(y,z) = \|x-y\| + \|y-z\| \geq \|(x-y)+(y-z)\| = \|x-z\| =$$
$$= d_R(x,z)$$

Czyli we wszystkich przypadkach $d_R(x,y) + d_R(y,z) \geq d_R(x,z)$

$(\Rightarrow)$ Dowód nie wprost.

Załóżmy, że R nie jest przechodnia. Weźmy $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, takie że

$(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} y_1) \in R \wedge (\operatorname{sgn} y_1, \operatorname{sgn} z_1) \in R \wedge (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} z_1) \notin R$

(istnieją, bo R nie jest przechodnia)

Oznaczmy $x' = x-y$, $z' = z-y$

Mamy wtedy $d_R(x,y) + d_R(y,z) = \|x-y\| + \|y-z\| =$

$= \|x-y\| + \|z-y\| = \|x'\| + \|z'\|$

$d_R(x,z) = \|x\| + \|z\| = \|x'+y\| + \|z'+y\|$

Załóżmy, że y_2 jest dowolną liczbą rzeczywistą (nie zależy od niego $\operatorname{sgn} y_1$). Mamy też $\|x'+y\| \geq |y_2 + x_2|$, czyli można tak dobrać y_2, że $\|x'+y\|$ jest dowolnie duże.

W szczególności można to zrobić tak (nie zmieniając x' i z'), że $\|x'+y\| > \|x'\| + \|z'\|$. Przy tak ustalonych x', z', y odpowiadające im x, y, z spełniają warunek:

$$\|x\| + \|z\| = \|x'+y\| + \|z'+y\| \geq \|x'+y\| > \|x'\| + \|z'\| =$$

$= \|x-y\| + \|y-z\|$

stąd $d_R(x,z) > d_R(x,y) + d_R(y,z)$ $\rightarrow$ d_R nie spełnia nierówności trójkąta.