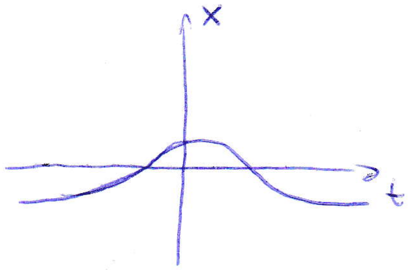
Zadanie 18a

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad f(t) = \left(\underbrace{\frac{1-t^2}{1+t^2}}_{x} , \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{y} \right)$

$x(t) = \frac{(1-t)(1+t)}{1+t^2}$

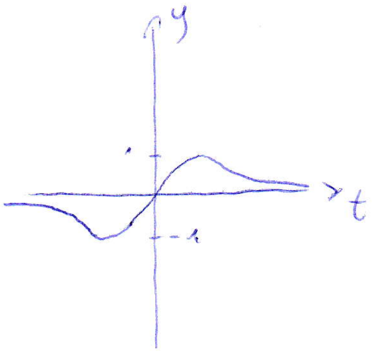
$1+t^2 > 0$



$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{\cancel{t\to\infty}} \frac{t^2(\frac{1}{t^2}-1)}{t^2(\frac{1}{t^2}+1)} = -1 = \lim_{t\to+\infty} x(t) \qquad x(0) = 1$

$x \in]-1,1]$

Objaśnienie: ⌈ licząc pochodną, oraz granice na brzegach dziedziny można określić zbiór wartości funkcji, ponieważ ten zbiór to nie całe $\mathbb{R}$, (czyli funkcja nie jest surjekcją. (to samo można zrobić dla y):



$y(t) \in [-1,1]$

⌈ Czy funkcja jest injekcją (różnowartościowa):

$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} = x \wedge \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2t_2}{1+t_2^2} = y$ (dzielę x przez y aby skrócić $1+t_i^2$)

$\frac{1-t^2}{\cancel{2}t} = \frac{1-t_2^2}{\cancel{2}t_2}$

$t_2(1-t^2) = t(1-t_2^2)$

$\vdots$

$t_2 - t^2 t_2 - t + t t_2^2 = 0$

$\vdots$

$t t_2 (t_2 - t) + t_2 - t = 0$

$(t_2 - t)(t t_2 + 1) = 0$

czyli $t_2 - t = 0 \vee t t_2 + 1 = 0$

$\underline{t_2 = t} \qquad t = -\frac{1}{t_2}$

jednakże jak popatrzymy na $y(t) = \ldots = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2t_2}{1+t_2^2}$ to mianownik zawsze jest dodatni, więc licznik musi mieć ten sam znak, czyli to zdanie jest sprzeczne, funkcja jest injekcją.

Uwarunkujmy teraz $y(x)$ bez t.

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x+1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1+t^2} \dashrightarrow x+1 = \frac{2}{1+t^2}$$

ponieważ $x \in]-1,1]$ mogę dzielić przez $x+1$

$$1+t^2 = \frac{2}{x+1}$$

$$t^2 = \frac{2}{x+1} - \left(\frac{x+1}{x+1}\right) \qquad t^2 = \frac{1-x}{x+1}$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2} \qquad y^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4\cdot\left(\frac{1-x}{x+1}\right)}{\left(1+\frac{1-x}{x+1}\right)^2} = \frac{4\cdot\left(\frac{1-x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1-x}{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\cdot\left(\frac{1-x}{x+1}\right)}{\left(\frac{2}{x+1}\right)^2} = \frac{\cancel{4}\cdot\left(\frac{1-x}{\cancel{x+1}}\right)(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}} = 1-x^2 = y^2$$

$\underline{y^2 + x^2 = 1}$ ← równanie okręgu, pamiętając o zbiorze wartości funkcji $x \in]-1,1]$

rysuję okrąg bez punktu $x=-1$