Zadanie 19 (relacje, odwzorowania)

Oskar Grocholski

Udowodnić, że jeśli mamy odwzorowowanie $f : X \to X$ i dla każdego argumentu x istnieje taka liczba naturalna n, że $f^n(x) = x$ to $f(x)$ jest bijekcją.

Dowód, że funkcja jest surjekcją. Zauważamy, że skoro dla każdego x istnieje takie n, że $f^n(x) = x$, a funkcja przyjmuje wartości tylko w X, to odpowiadającym wartości x argumentem jest $f^{n-1}(x)$

Dowód, że funkcja jest injekcją. Zakładamy, że $f(a) = f(b) = g$ i $a \neq b$. Zgodnie z warunkami zadania, istnieje takie n, że $f^n(g) = f^{n+1}(a) = a$ oraz takie m, że $f^m(g) = f^{m+1}(b) = b$. Wobec tego $f^{n+1}(g) = g$ i $f^{m+1}(g) = g$. Oznacza to, że jeśli zadziałamy $k(n + 1)$ lub $j(m + 1)$ razy funkcją na g, to dostaniemy g (k, j są liczbami naturalnymi). Zgodnie z powyższym $f^{k(n+1)+n}(g) = f^n(g) = a$ i $f^{j(m+1)+m}(g) = f^m(g) = b$. Możemy sobie wybrać $k = n$ i $j = m$. Wtedy $a = f^{m(n+1)+n}(g) = f^{mn+m+n}(g) = f^{n(m+1)+m}(g) = b$ co prowadzi do sprzeczności. Wobec tego f jest injekcją.