Maks Walewski
Stanisław Żukowski

(9) UDOWODNIJ: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

DOWÓD INDUKCYJNY:

(1) $n=1$

$$(2\cdot 1)! < 2^{2\cdot 1}(1!)^2$$

$$2 < 4 \quad - \text{tożsamość}$$

(2) Założenie: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

Teza: $(2(n+1))! < 2^{2(n+1)}\cdot((n+1)!)^2$

Dowód:

$$(2(n+1))! < 2^{2(n+1)}((n+1)!)^2$$

$$(2n+2)! < 2^{2n}\cdot 2^2\,(n!\cdot(n+1))^2$$

$$\frac{(2n+2)!}{4\cdot(n+1)^2} < 2^{2n}(n!)^2$$

$$\frac{(2n+2)!}{4(n+1)^2} = \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{(2n)!\,(2n+1)\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{(n+1)}}{\cancel{4}_{2}\cdot(n+1)^{\cancel{2}}} =$$

$$= (2n)!\,\frac{2n+1}{2n+2}$$

Oczywiście: $2n+1 < 2n+2 \implies \frac{2n+1}{2n+2} < 1$

Zatem: $(2n)!\,\frac{2n+1}{2n+2} < (2n)!$ i (z założenia)

$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, więc

$$\frac{(2n+2)!}{4\cdot(n+1)^2} < 2^{2n}\cdot(n!)^2$$

$\blacksquare$

Zatem na mocy indukcji matematycznej

$(2n)! < 2^{2n}\cdot(n!)^2$ – tożsamość $\forall n\in\mathbb{N}$