Krzysztof Mękała (ad zad nr 9)

Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\limsup A_n$, $\liminf A_n$ oraz $\bigcup_n A_n$ dla $A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{n+1}, \frac{4n-15}{2n-7}\right]$.

$$\frac{4n-15}{2n-7} = \frac{2(2n-7)-1}{2n-7} = 2 - \frac{1}{2n-7} = \frac{-\frac{1}{2}}{n-\frac{7}{2}} + 2$$

$$A_1 = \left[\frac{(-1)^1 \cdot 1}{2}, \frac{4-15}{2-7}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{11}{5}\right]$$

$$A_2 = \left[\frac{(-1)^2 \cdot 2}{3}, \frac{8-15}{4-7}\right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right]$$

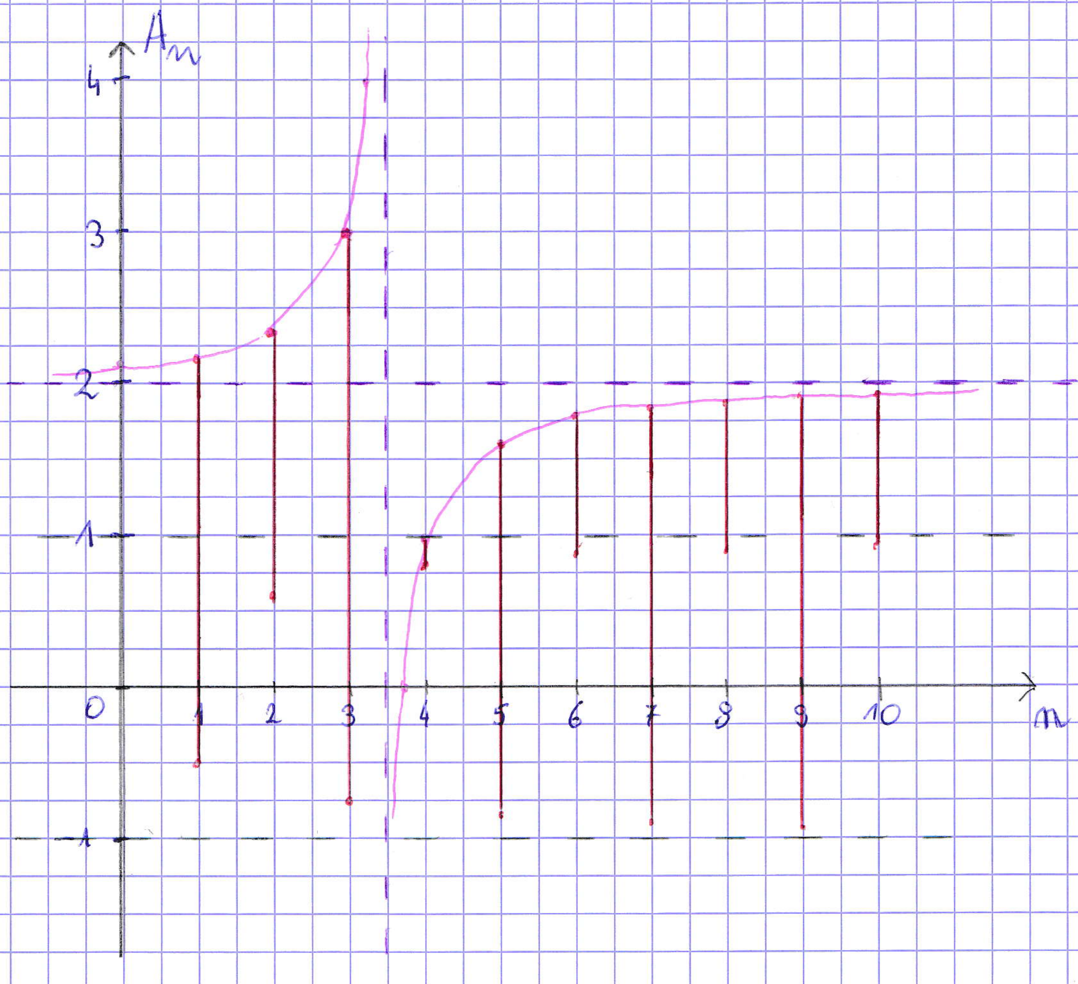
$$A_3 = \left[\frac{-3}{4}, 3\right]$$

$$A_4 = \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

$$A_5 = \left[-\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right]$$

itd.

Powyższe obliczenia pozwalają zaprezentować ciąg zbiorów w następujący sposób:



Łatwo zauważyć, że dolne ograniczenie każdego elementu ciągu dąży do −1 (dla wyrazów nieparzystych) lub 1 (dla wyrazów parzystych), zaś górne ograniczenie zawiera się w ~~[illegible]~~ hiperboli danej równaniem $y = \frac{-\frac{1}{2}}{n-\frac{7}{2}} + 2$.

Spośród liczb naturalnych funkcja $f(n) = \frac{-\frac{1}{2}}{n-\frac{7}{2}}+2$ wartość maksymalną przyjmuje dla $n=3$: $f(3)=3$. Ograniczenie dolne każdego ze zbiorów zawiera się w przedziale $]-1,1[$, a funkcja $f(n)$ wartość minimalną przyjmuje dla $n=4$: $f(4)=1$. Stąd:

$$\bigcup_n A_n =]-1,3]$$

[redacted]

(Żadna wartość z tego przedziału nie jest wykluczona, co widać po porównaniu np. wyrazów A_3 i A_9)

Dla wyrazów od A_1 do A_3 i od A_5 do A_n część wspólna należy do przedziału $[1,\frac{5}{3}]$, ale A_4 ma wartość maksymalną 1. Stąd:

$$\bigcap_n A_n = \{1\}$$

Jeśli $x \in \liminf A_n$, to należy do wszystkich A_n z wyjątkiem skończonej liczby zbiorów. Poczynając od wyrazu A_5, wartości każdego z nieparzystych wyrazów ciągu dążą do przedziału $]-1,2[$, zaś dla wyrazów parzystych do $[1,2[$ (ze względu na asymptoty). Stąd:

$$\liminf A_n = [1,2[$$

Biorąc pod uwagę powyższe i fakt, że jeśli $x \in \limsup A_n$, to należy do dowolnego nieskończonego podzbioru A_n:

$$\limsup A_n =]-1,2[$$