Analiza IR - Zadania Teoria Mnogości - Rozwiązania

21 listopada 2016

Nie wszystkie rozwiązania zostały sprawdzone i zalecam krytycyzm w stosunku do nich.

Niech X, Y, Z - zbiory. W zadaniach będziemy korzystać z następujących faktów:

1. Operacje „$\cap$” i „$\cup$” są łączne i przemienne.
2. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
3. $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$
4. $X \setminus Y = X \cap Y'$
5. $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$
6. $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$

ROZWIĄZANIA
Zadanie 1
$A \cup B = \mathbb{R}$ $\quad A \cap B =]0, 3[$ $\quad A \setminus B = \emptyset$ $\quad B \setminus A =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

Zadanie 2
W zadaniu jest błąd, gdyż zbiór $(A \setminus D) \cap (D \setminus B)$ jest zbiorem pustym.

Zadanie 3
a)$(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) = (A_1 \cap A_2) \cup B$ czyli $(A_1 \cap A_2) \cup B = B$ co jest równoważne temu, że$(A_1 \cap A_2) \subset B$.
b) Warunek można przepisać w postaci

$$(A \cap C') \cup B = A \cup B.$$

Zbiór A można przedstawić jako

$$A = A \cap X = A \cap (C \cup C') = (A \cap C) \cup (A \cap C').$$

Wstawiając takie przedstawienie zbioru A do warunku z zadania otrzymamy

$$(A \cap C') \cup B = [(A \cap C) \cup (A \cap C')] \cup B = (A \cap C) \cup (A \cap C') \cup B$$

Zbiory $A \cap C$ i $A \cap C'$ są rozłączne, więc ostatecznie warunek upraszcza się do

$$A \cap C \subset B.$$

c) Przekształcając lewą stronę dostaniemy

$$\begin{aligned}[(A \cap B) \cup C] \setminus A = [(A \cap B) \cup C] \cap A' = [(A \cap B) \cap A'] \cup (C \cap A') = \\ = (A \cap A' \cap B) \cup (C \cap A') = C \cap A' = C \setminus A\end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tutaj oczywisty fakt, że $A \cap A' = \emptyset$. Warunek więc upraszcza się do postaci

$$C \setminus A = (A \cap B) \setminus C.$$

Oznacza to, że $C = \emptyset$ i A, B - rozłączne.

Zadanie 5
a)Przekształcamy prawą stronę równości

$$\begin{aligned}[(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C) &= [(A \cup B) \cap C'] \cup (A \cap C) = \\ &= [(A \cap C') \cup (B \cap C')] \cup (A \cap C) = \\ &= [(A \cap C') \cup (A \cap C)] \cup (B \cap C') = \\ &= A \cup (B \cap C') = A \cup (B \setminus C).\end{aligned}$$

Przy czym przy przedostatnim przekształceniu skorzystaliśmy z faktu, że

$$(A \cap C) \cup (A \cap C') = A.$$

b) Przekształcamy lewą stronę równości

$$\begin{aligned}A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] &= A \setminus [B \setminus (C \cap D')] = A \setminus [B \cap (C \cap D')'] = \\ &= A \setminus [B \cap (C' \cup D)] = A \cap [B \cap (C' \cup D)]' = \\ &= A \cap [B' \cup (C' \cup D)'] = A \cap [B' \cup (C \cap D')] = \\ &= (A \cap B') \cup [A \cap (C \cap D')] = (A \setminus B) \cup [(A \cap C) \setminus D]\end{aligned}$$

c) Indukcja. Dla $n = 2$ tożsamość przybiera formę

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$$

Jest ona prawdziwa, bo:

$$(A_1 \setminus A_2) \cup A_2 = (A_1 \cap A_2') \cup A_2 = (A_1 \cup A_2) \cap (A_2' \cup A_2) =$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cap X = A_1 \cup A_2$$

Załóżmy, że tożsamość jest prawdziwa dla dowolnego $k > 2$ i zapiszmy ją dla $n = k + 1$

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = (A_1 \setminus A_2) \cup ... \cup (A_{k-1} \setminus A_k) \cup (A_k \setminus A_{k+1}) \cup A_{k+1}$$

Identycznie jak wcześniej można pokazać, że

$$A_k \cup A_{k+1} = (A_k \setminus A_{k+1}) \cup A_{k+1}$$

Po uwzględnieniu powyższego tożsamość dla $k + 1$ przyjmuje postać

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = (A_1 \setminus A_2) \cup ... \cup (A_{k-1} \setminus A_k) \cup A_k \cup A_{k+1}$$

Widać, że z prawdziwości tożsamości dla k wynika jej prawdziwosc dla $k+1$.
□
d) Indukcja. Dla $n = 2$ mamy

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2.$$

We wcześniejszym podpunkcie pokazaliśmy, powyższa tożsamość jest prawdziwa. Załóżmy, że tożsamość jest prawdziwa dla dowolnego $k > 2$ i zapiszmy ją dla $n = k + 1$

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = [A_1 \setminus (A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1})] \cup ...$$
$$\cup [A_{k-1} \setminus (A_k \cup A_{k+1})] \cup (A_k \setminus A_{k+1}) \cup A_{k+1}$$

Zdefiniujmy $B_i = [A_i \setminus (A_{i+1} \cup ... \cup A_k]$. Wtedy tożsamość dla k przyjmuje postać

$$A_1 \cup ... \cup A_k = B_1 \cup ... \cup B_{k-1} \cup A_k$$

Zauważmy, że

$$A_i \setminus (A_{i+1} \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}) = A_i \cap [(A_{i+1} \cup ... \cup A_k) \cup A_{k+1}]' =$$
$$= A_i \cap [(A_{i+1} \cup ... \cup A_k)' \cap A_{k+1}'] = [A_i \cap ((A_{i+1} \cup ... \cup A_k)'] \cap A_{i+1} =$$
$$= A_i \setminus (A_{i+1} \cup ... \cup A_k) \cap A_{k+1}' = B_i \cap A_{k+1}'$$

Stąd dla $k+1$ mamy

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = (B_1 \cap A'_{k+1}) \cup ... \cup (B_{k-1} \cap A'_{k+1}) \cup (A_k \setminus A_{k+1}) \cup A_{k+1}$

Z rozdzielności $\cap$ względem $\cup$ i wiedząc, że $A_k \cup A_{k+1} = (A_k \setminus A_{k+1}) \cup A_{k+1}$ możemy zapisać tożsamość dla $k+1$

$$\begin{aligned}
&A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = [A'_{k+1} \cap (B_1 \cup ... \cup B_{k-1})] \cup A_{k+1} \cup A_k = \\
&= [(A'_{k+1} \cup A_{k+1}) \cap (A_{k+1} \cup (B_1 \cup ... \cup B_{k-1}))] \cup A_k = \\
&= [X \cap (A_{k+1} \cup (B_1 \cup ... \cup B_{k-1}))] \cup A_k = B_1 \cup ... \cup B_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1}
\end{aligned}$$

Widać, że z prawdziwości tezy dla k wynika jej prawdziwość dla $k+1$. $\square$
e) Wydaje mi się, że ta tożsamośc nie jest prawdziwa.

Zadanie 6
a) Jeżeli $x \in \cup_{i \in I}(A_i \setminus B_i)$ to $x \in (A_k \setminus B_k)$ dla pewnego $k \in I$. Oznacza to, że $x \in A_k$ i $x \notin B_k \Rightarrow x \in \cup_{i \in I} A_i$ i $x \notin \cap_{i \in I} B_i$, czyli $x \in (\cup_{i \in I} A_i) \setminus (\cap_{i \in I} B_i)$. Równość nie musi zachodzić, rozważmy następującą sytuację $x \in A_{i_1}$ i $x \notin A_j$, ponadto $x \in B_{i_2}$ i $x \notin B_j$, $j \neq i_1 = i_2$. Wtedy $x \in (\cup_{i \in I} A_i) \setminus (\cap_{i \in I} B_i)$ ale $x \notin \cup_{i \in I}(A_i \setminus B_i)$.
b) Jeśli $x \in \cup_{i \in I}(A_i \cap B_i)$ to $x \in (A_k \cap B_k)$ dla pewnego $k \in I$. Oznacza to, że $x \in A_k$ i $x \in B_k \Rightarrow x \in (\cup_{i \in I} A_i) \wedge x \in (\cup_{i \in I} B_i) \Rightarrow x \in (\cup_{i \in I} A_i) \cap (\cup_{i \in I} B_i)$. Zawieranie nie jest w równością w przykładzie takim jak w a) ze zmianą $i_2 \neq i_1 \neq j$ zamiast $j \neq i_1 = i_2$.

Zadanie 7
Błąd w treści chyba (n+1=k+1?).

Zadanie 8
$A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Stąd

$$\begin{aligned}
(A \div C) \cup (C \div B) =& (A \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \cup (B \setminus C) = \\
=& (A \cap C') \cup (C \cap A') \cup (C \cap B') \cup (B \cap C') = \\
=& [C' \cap (A \cup B)] \cup [C \cap (A' \cup B')] = \\
=& [(A \cup B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cap B)].
\end{aligned}$$

Załóżmy, że $x \in A \div B$, stąd $x \in A \cup B$ i $x \notin A \cap B$. Teraz jeśli $x \in C$ to $x \in C \setminus (A \cap B)$, a w przeciwnym wypadku tj. $x \notin C$ mamy $x \in (A \cup B) \setminus C$. Zatem $x \in (A \div C) \cup (C \div B)$ i wykazaliśmy zawieranie $A \div B \subset (A \div C) \cup (C \div B)$. Wykażemy teraz równoważność zdań a, b, c.

$a \Rightarrow b$: $a \Leftrightarrow (A \div C) \cap (C \div B) = \emptyset$

$$\begin{aligned}(A \div C) \cap (C \div B) &= [(A \cup C) \setminus (A \cap C)] \cap [(C \cup B) \setminus (C \cap B)] = \\ &= (A \cup C) \cap (A' \cup C') \cap (C \cup B) \cap (C' \cup B') = \\ &= [C \cup (A \cap B)] \cap [C' \cup (A' \cap B')] = \\ &= [C \cup (A \cap B)] \cap [C \cap (A \cup B)]' = \\ &= [C \cup (A \cap B)] \setminus [C \cap (A \cup B)] = \emptyset\end{aligned}$$

Z ostatniej równości wnioskujemy, że $[C \cup (A \cap B) = \emptyset] \vee [C \cup (A \cap B)] \subset [C \cap (A \cup B)]$. Zauważmy, że $[[C \cup (A \cap B) = \emptyset] \Leftrightarrow (C = \emptyset \text{ i } A \cap B = \emptyset)] \Rightarrow b$. W celu dowodu $a \Rightarrow b$ wystarczy pokazać jeszcze, że $[C \cup (A \cap B)] \subset [C \cap (A \cup B)] \Rightarrow b$. Zachodzi $[C \cup (A \cap B)] \subset [C \cap (A \cup B)] \Leftrightarrow [C \subset C \cap (A \cup B) \wedge A \cap B \subset C \cap (A \cup B)] \Leftrightarrow A \cap B \subset C \subset A \cup B$. W tym miejscu widać, że $c \Leftrightarrow a$. Jeśli $A \cap B \subset C \subset A \cup B$ to:

$$\begin{aligned}(A \div B) \setminus C &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' \cap C' = (A \cup B) \cap [(A \cap B) \cup C]' \\ &= (A \cup B) \cap C' = (A \cup B) \setminus C\end{aligned}$$

$(A \div B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cap B)' \cap C = (A \cup B) \cap C \setminus (A \cap B) = C \setminus (A \cap B)$.

Oczywiście $(A \div C) \cup (C \div B) = [(A \cup B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cap B)] = [(A \div B) \cap C] \cup [(A \div B) \setminus C] = A \div B$ co kończy dowód implikacji $a \Rightarrow b$. Pozostało udowodnić, że $b \Rightarrow c$. W tym celu zapiszmy, że

$$(A \cup B) \setminus C = [(A \div B) \cup (A \cap B)] \setminus C$$

$$C \setminus (A \cap B) = [(A \div B) \setminus (A \cup B)] \cap C$$

. Wtedy b przybiera postać

$$\begin{aligned}&(A \div C) \cup (C \div B) = [C \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cup B) \setminus C] = \\ &= [[(A \div B) \cup (A \cap B)] \setminus C] \cup [[(A \div B) \setminus (A \cup B)] \cap C] = ... = \\ &= [(A \div B) \cap C'] \cup [(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \div B) \cap [C \setminus (A \cup B)] = \\ &= [(A \div B) \cap [C' \cup [C \setminus (A \cup B)]]] \cup [(A \cap B) \setminus C] = A \div B\end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że $(A \cap B) \setminus C = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B \subset C$ i $C' \cup [C \setminus (A \cup B)] = X \Leftrightarrow C \subset A \cup B$. Udowodniliśmy implikację $b \Rightarrow c$. Warunki są równoważne, bo pokazaliśmy, że $a \Rightarrow c; , b \Rightarrow c; , a \Rightarrow c$.

Zadanie 18

b) g jest surjekcją, gdyż dla liczby rzeczywistej $a \neq 0$ bierzemy $(\frac{1}{a}, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ i otrzymujemy $g(\frac{1}{a}, 0) = a$, natomiast dla $a = 0$ bierzemy $(0,1) \in$

$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ i również otrzymujemy $g(0,1) = 0$. Nie jest jednak injekcją gdyż punktom (x,y) i $(x,-y)$ przyporządkowane są te same wartości.
c) Przeanalizujmy funkcję h z dziedziną i przeciwdziedziną rozszerzoną do $\mathbb{R}$. Wtedy h jest opisana parabolą o wierzchołku w punkcie $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$. Stąd h nie jest surjekcją, gdyż nie przyjmuje wartości całkowitych mniejszych niż 0. Parabola jest symetryczna względem prostej $x = \frac{3}{4}$, więc warunek $h(x_1) = h(x_2)$ jest równoważny temu, że $|x_1 - \frac{3}{4}| = |x_2 - \frac{3}{4}|$. Jednak jedynym rozwiązaniem tego równania w liczbach całkowitych jest $x_1 = x_2$, h jest więc injekcją.

Zadanie 19
Odwzorowanie jest surjekcją $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists x' \in X : f(x') = x$. Odwzorowanie f jest surjekcją, gdyż dla dowolnego $x \in X$ bierzemy $x' = f^{n-1}(x)$. W celu wykazania injektywności załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$. Istnieją n_1, n_2 takie, że $f^{n_1}(x_1) = x_1$ i $f^{n_2}(x_2) = x_2$. Zauważmy ponadto, że $x = f^{kn}(x)$ dla $k \in \mathbb{N}$. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{n_1 n_2}(x_1) = f^{n_1 n_2}(x_2)$, ale $x_1 = f^{n_1 n_2}(x_1)$ i $x_2 = f^{n_1 n_2}(x_2)$, więc wnioskujemy, że $x_1 = x_2$. Odwzorowanie f jest surjekcją i injekcją, jest więc bijekcją.

Zadanie 20
a) Niech $x_n :\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$ i $y_n :\ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$ i X - zbiór wyrazów ciągu x_n. Zdefinijmy funkcję $f :\ [0,1[\to [0,1]$ wzorem $f(x_n) = y_n$ i $f(x) = x$ gdy $x \notin X$. Łatwo można się przekonać, że f jest surjekcją i injekcją.
b) Podzielmy przedział $]0,1[$ na przedziały $]0, \frac{1}{4}]$ i $]\frac{1}{4}, 1[$ a zbiór $[-2,2[\setminus \{-1\}$ na przedziały $[-2,-1[$ i $]-1,2[$. W poprzednim podpunkcie pokazaliśmy, że istnieje bijekcja z $[0,1[$ na $[0,1]$, analogicznie można pokazać, że istnieje bijekcja z $]0,1]$ na $[0,1]$. Na potrzeby zadania oznaczmy g_1 - bijekcja z $[0,1[$ na $[0,1]$, g_2 - bijekcja z $]0,1]$ na $[0,1]$.
Zauważmy, że $]0, \frac{1}{4}]$ jest równoliczny z $]0,1]$ ($h_1 :\ ]0, \frac{1}{4}] \to]0,1]\ \ h_1(x) = 4x$), a przedział $[-2,-1[$ jest równoliczny z $[0,1[$ ($h_2 :\ [0,1[\to [-2,-1[\ \ h_2(x) = x-2$). Złożenie bijekcji jest bijekcją, więc bijekcja pomiędzy $]0, \frac{1}{4}]$ i $[-2,-1[$ to $h_2 \circ {g_1}^{-1} \circ g_2 \circ h_1$. Natomiast bijekcja między $]\frac{1}{4}, 1[$ i $]-1,2[$ to $h_3 :\ ]\frac{1}{4}, 1[\to]-1,2[\ \ h_3(x) = 4x-2$. Podsumowując, szukana funkcja

$$f(x) = \begin{cases} h_2 \circ {g_1}^{-1} \circ g_2 \circ h_1(x) & dla\ \ x \in]0, \frac{1}{4}] \\ h_3(x) & dla\ \ x \in]\frac{1}{4}, 1[\end{cases}$$

c) Dowolną liczba naturalna ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $n = 2^{a-1}(2b-1)$, $a, b \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy funkcję $f :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wzorem $f(n) = (a,b)$. Z jednoznaczności rozkładu $n = 2^{a-1}(2b-1)$ f jest injekcją, jest też surjekcją, gdyż dowolna para (a,b) zadaje pewną liczbę naturalną.

f jest więc bijekcją.

Zadanie 21
$R_{min} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(a,d),(c,a),(c,d),(d,a),(d,c)\}$.

Zadanie 24
1)Zwrotność: $(x,x) \in R$ bo $10^n(x-x) = 0 \in \mathbb{Z}$.
2)Symetryczność: $(x,y) \in R \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 10^n(x-y) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 10^n(y-x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (y,x) \in R$.
3) Przechodniość: $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Leftrightarrow \exists n_1 : 10^{n_1}(x-y) \in \mathbb{Z} \wedge \exists n_2 : 10^{n_2}(y-z) \in \mathbb{Z}$. Oznaczmy $a = 10^{n_1}(x-y)$ i $b = 10^{n_2}(y-z)$. Liczba $10^{n_2}a + 10^{n_1}b = 10^{n_1+n_2}(x-z)$ jest liczbą całkowitą jako suma liczb całkowitych. Stąd wnioskujemy, że $(x,z) \in R$. Relacja jest więc przechodnia.
Klasy równoważnośći: Zauważmy, że $(x,y) \in R \Leftrightarrow x-y$ ma skończone rozwinięcie dziesiętne. Zapiszmy x i y w postaci ilorazu względnie pierwszych liczb całkowitych $x = \frac{p_1}{q_1}$, $y = \frac{p_2}{q_2}$. Wtedy $x - y = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{q_1q_2}$. Skorzystamy teraz z faktu, że liczba wymierna ma skończone rozwinięcie dziesiętne $\Leftrightarrow$ mianownik tej liczby zapisanej w postaci nieskracalnej ma tylko dwa dzielniki - 2 i 5. Stąd wnioskujemy, że jeśli q_1 ma w rozkładzie na czynniki pierwsze liczbę inną niż 2 i 5 to $[x] = \{x\}$, w przeciwnym wypadku $[x] = \{\frac{q_2}{2^i \cdot 5^j} : i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Zadanie 25
Niech $(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Znajdźmy $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ takie, że $f(x,y) = (a,b)$. Jeśli $b = 0$ to $x = y$ i $x = \frac{a}{2}$, w przeciwnym wypadku dostajemy układ równań $x + y = a$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b$ którego rozwiązaniem są 2 pary punktów $(x_1 = \frac{ab+2+\sqrt{4+a^2b^2}}{2b}, y_1 = \frac{ab-2-\sqrt{4+a^2b^2}}{2b})$, $(x_2 = \frac{ab+2-\sqrt{4+a^2b^2}}{2b}, y_2 = \frac{ab-2+\sqrt{4+a^2b^2}}{2b})$. Jeśli $b < 0$ to należy odrzucić pierwszą parę, gdyż $x_1 < 0$, natomiast $x_2 > 0$ (oczywiste) i $y_2 > 0$ (bo $\sqrt{a^2b^2+4} < |ab| + 2 \Leftrightarrow ab - 2 + \sqrt{a^2b^2+4} < 0$). W przypadku $b > 0$ znowu odrzucamy pierwszą parę, gdyż $y_1 < 0$, jednocześnie widać, że $x_2 > 0$ i $y_2 > 0$. Za pomocą powyższych rozważań wykazaliśmy surjektywność i injektywność odwzorowania, bo widać, że danej parze (a,b) jest w sposób jednoznaczny przyporządkowana para (x,y).

$$f^{-1}(a,b) = \begin{cases} (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \;\; dla \;\; a \in \mathbb{R}_+, b = 0 \\ (\frac{ab+2+\sqrt{4+a^2b^2}}{2b}, \frac{ab-2-\sqrt{4+a^2b^2}}{2b}) \;\; dla \;\; a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R} \setminus 0 \end{cases}$$

Zadanie 32
Zbiór X posiada kres górny równy 1 i kres dolny równy 0. X jest ograniczony z dołu przez 0 (oczywiste), załóżmy że istnieje większe ograniczenie dolne

$\delta > 0$, $\forall m, n \;\; \delta < \frac{m}{(m+n)n}$. W szególności $\forall n \;\; \delta < \frac{1}{n^2+n} \Leftrightarrow (n^2+n)\delta < 1$. Z aksjomatu Archimedesa wiemy natomiast, że $\exists k \in \mathbb{N}$ takie, że $k\delta > 1$. Oczywiście $n^2 + n > k$ dla odpowiednio dużych n, stąd $(n^2+n)\delta > k\delta > 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność, stąd wniosek, że δ nie jest ogr. górnym X i 0 jest kresem dolnym X. Podobnie z kresem górnym załóżmy że istnieje ograniczenie górne mniejsze niż 1 tj. $1-\epsilon$, $\epsilon > 0$. W szczególności musi być, że $\forall m \;\; \frac{m}{1+m} = 1 - \frac{1}{m+1} < 1 - \epsilon \Leftrightarrow 1 > (m+1)\epsilon$. Co jest sprzecznością z aksjomatem Archimedesa, więc $1-\epsilon$ nie jest ograniczeniem górnym i 1 jest kresem górnym X.
Zbiór Y ma te same kresy co zbiór X. Zauważmy najpierw, że $0 \leq x - E(x) < 1$ i $\sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + (\sqrt{n-1} - E(\sqrt{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + (\sqrt{n-1} - E(\sqrt{n-1})$. Stąd otrzymujemy nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + 1$$

Korzystając z tych nierówności możemy w sposób zupełnie identyczny jak w przypadku zbioru X udowodnić, że 0 i 1 są kresami zbioru Y (wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ może być dowolnie małe).

Zadanie 37
Suma liczb wymiernych jest wymierna, oznaczmy więc $q = a^3 + a + a^2 + a = a(a^2 + a + 2)$. Wyrażenie $a^2 + a + 2$ jest różne od zera dla każdego $a \in \mathbb{R}$, można więc napisać

$$a = \frac{q}{a^2 + a + 2}$$

Z założenia $a^2 + a$ jest liczbą wymierną, więc i $a = \frac{q}{a^2+a+2}$ jest liczbą wymierną.